

В. Ф. Куропатенко

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ
ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ
ГАЗОДИНАМИКИ

Численное интегрирование уравнений газодинамики

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial t} &= 0, \\ P &= f(v, E), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где u — скорость, v — удельный объем, P — давление, E — внутренняя энергия, $P = f(v, E)$ — уравнение состояния, сильно затрудняется тем, что они допускают разрывные решения (ударные волны). Так как разрывы перемещаются по сетке точек, на которой определяется приближенное решение и взаимодействуют друг с другом, то особый расчет каждого разрыва вызывает большие трудности. Эти трудности, однако, могут быть устранены включением в разностную схему, используемую для численного интегрирования, некоторых вспомогательных членов. Роль их состоит в том, чтобы заменить разрыв непрерывным решением, быстро меняющимся в некоторой области.

В настоящее время широко известны три принципиально отличных друг от друга разностных метода расчета ударных волн: а) метод Неймана и Рихтмайера [1], б) метод Лакса [2], в) метод С. К. Годунова [3], [6].

Первый метод основан на использовании хорошо известного влияния вязкости на структуру фронта ударной волны. В дифференциальные уравнения газодинамики по аналогии с физической вязкостью вводится „вязкий“ член, в результате чего ударные волны заменяются непрерывным решением. После введения „вязкости“ совершается переход от дифференциальных уравнений к разностным, которые используются для численного интегрирования. Со времени появления работы Неймана и Рихтмайера этот метод подвергался различным изменениям и обобщениям. В частности, одна из схем, основанных на этом методе, применялась Л. В. Дмитриевой для решения ряда задач.

Сущность второго метода заключается в особом способе замены производных по времени от искоемых функций их разностными аналогами. Недостатком этого метода является то, что при малых зна-

чениях величины $\frac{\tau c}{h}$, где τ — шаг по времени, c — скорость звука, h — шаг по пространству, он превращает все функции в линейные. При этом он размывает контактные разрывы.

В третьем методе все функции, определенные на сетке точек, предполагаются кусочнопостоянными. В таком случае справа и слева от границы между двумя интервалами сетки значения гидродинамических величин оказываются различными, вследствие чего на границе происходит распад разрыва. При решении задачи о распаде разрыва в газе определяются значения скорости и давления на контактном разрыве, которые используются для вычисления основных значений u , p , v , E . Существенным недостатком этого метода является необходимость решения в каждой точке сетки задачи о распаде произвольного разрыва, которая сама по себе является сложной.

Предлагаемый ниже метод построения разностных схем для численного интегрирования системы (1) основывается, в отличие от перечисленных методов, на следующих предположениях: а) приближенное решение рассматривается как совокупность решений двух типов (R - и S -волн), б) R -волны рассчитываются с помощью разностных уравнений, не содержащих никаких вспомогательных членов, в) для расчета S -волн используются соотношения, справедливые только на разрывах. С их помощью рассчитываются вспомогательные члены, входящие в разностные уравнения.

Разделим все рассматриваемые нами решения системы (1) на два типа:

- 1) сильные разрывы (ударные волны),
- 2) непрерывные решения.

Сильные разрывы разграничивают области с непрерывными решениями. Значения гидродинамических величин справа и слева от разрыва связаны между собой условиями Гюгоню

$$\begin{aligned} v_+ - v_- &= -\frac{1}{w} (u_+ - u_-), \\ u_+ - u_- &= \frac{1}{w} (p_+ - p_-), \\ E_+ - E_- &= \frac{1}{2} (p_+ + p_-) (v_- - v_+). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь величины со знаком плюс характеризуют вещество по одну сторону от разрыва, величины со знаком минус — по другую, w — скорость распространения сильного разрыва.

Наибольшие трудности при численном интегрировании системы (1) возникают при расчете сильных разрывов. Считая метод их расчета основной отличительной особенностью разностной схемы, применяемой для нахождения приближенного решения системы (1), введем следующую классификацию.

Если непрерывные решения системы (1) с помощью некоторой разностной схемы определяются на множестве D точек с координатами вида

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_0 + \sum_{m=1}^i h_m, \\ t_i &= t_0 + \sum_{n=1}^i \tau_n, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

а сильные разрывы определяются на множестве \bar{D} , не совпадающем с D , то такую разностную схему назовем *неоднородной*.

Примером неоднородной схемы может служить схема, в которой вычисляются траектории всех или части ударных волн и каждая ударная волна рассчитывается особо по формулам (2). Профили величин u , p , v , E , полученные с помощью неоднородной схемы, как правило, имеют разрывы.

Если же сильные разрывы с помощью разностной схемы определяются на множестве D вместе с непрерывными решениями системы (1), то такую разностную схему назовем *однородной*.

В однородных разностных схемах не выделяются особо сильные разрывы, а это приводит к их размыванию на некоторую область. Профили величин u , p , v , E , полученные с помощью однородной схемы, непрерывны и быстро меняются там, где должен быть сильный разрыв.

Примером однородных схем являются схемы Неймана, Годунова и Лакса. В двух последних не делается различия при расчете сильных разрывов и непрерывных решений. Однако применение метода расчета сильных разрывов к расчету непрерывных решений часто приводит (как это имеет место при расчете сильных разряжений вблизи свободной поверхности) к большим погрешностям. В методе Неймана [1] также не делается различия между расчетом сильных разрывов и непрерывных решений, и величина

$$\varepsilon = -c\rho h^2 \frac{\partial u}{\partial x} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \quad (4)$$

вводимая в дифференциальные и, соответственно, в разностные уравнения для размывания сильных разрывов, действует также и в случае непрерывного решения, в частности, при расчете волн разряжения. Имеется также видоизменение этого метода [5], в котором величина $\varepsilon = 0$ при $\frac{\partial u}{\partial x} \geq 0$.

Применение для расчета сильных разрывов одного алгоритма, а для расчета непрерывных решений — другого не противоречит понятию однородности схемы и является одним из путей повышения точности. Приближенное решение системы (1), определенное на множестве D , будем предполагать состоящим из решений двух типов — R - и S -волн. Приближенное решение в интервале $[x_i, x_{i+1}]$ назовем R -волной, если в этом интервале выполнено условие

$$\frac{u_i - u_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \geq 0 \quad (5)$$

и S -волной, если выполнено условие

$$\frac{u_i - u_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} < 0. \quad (6)$$

Покажем, что, если в некотором интервале $[x_i, x_{i+1}]$ находится сильный разрыв, приближенное решение в этом интервале будет S -волной. Для этого воспользуемся теоремой Цемплена [4], из которой следует, что $v_+ < v_-$. Используя это неравенство, из первого уравнения (2) получим

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } w > 0 \quad u_+ - u_- > 0, \\ \text{при } w < 0 \quad u_+ - u_- < 0. \end{array} \right\} \quad (7)$$

Предположим, что $x_{i+1} > x_i$. Тогда при $w > 0$ будем иметь $u_i = u_+ + \varepsilon_1$, $u_{i+1} = u_- + \varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 малые, зависящие от выбора промежутка. Выбрав этот промежуток так, чтобы было $|u_+ - u_-| - |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| > 0$, получим $u_i - u_{i+1} = u_+ - u_- + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 > 0$, и, следовательно, выполнено соотношение (6). Аналогично соотношение (6) выполняется и при $w < 0$.

Обратное утверждение не верно. Так например, если приближенное решение в интервале $[x_i, x_{i+1}]$ является S -волной, то точное решение в этом интервале может быть как сильным разрывом, так и волной сжатия — непрерывным решением. В случае непрерывного решения в пределе при $h = x_{i+1} - x_i \rightarrow 0$ из (5) и (6) получим соответственно

$$\frac{\partial u}{\partial x} \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} < 0. \quad (8)$$

Из (8) следует, что волна разрежения, являющаяся решением системы (1), может быть аппроксимирована множеством R -волн, волна сжатия — множеством S -волн.

Нахождение R -волны не вызывает затруднений. Для этого может быть использована любая устойчивая разностная схема, аппроксимирующая систему (1). Для расчета S -волны будем использовать соотношения (2). При этом все величины со знаком минус и одна из величин со знаком плюс предполагаются известными. Только в этом случае из (2) вместе с уравнением состояния

$$p = f(v, E) \quad (9)$$

могут быть найдены остальные величины со знаком плюс. Эти величины, играющие вспомогательную роль, входят в правые части разностных уравнений, используемых для нахождения приближенного решения системы (1).

В зависимости от того, какую из величин со знаком плюс выбрать в качестве известной при решении системы (2), получаются различные методы расчета S -волн. При этом и сильные разрывы, и волны сжатия, являющиеся непрерывным решением, рассчитываются по тем же формулам, что и S -волны. Разница между ними заключается лишь в том, что величина

$$\omega = (u_i - u_{i+1})^2 \quad (10)$$

мала на волнах сжатия и велика на сильных разрывах.

Получим, в качестве примера, разностную схему в классе однородных разностных схем. В процессе численного интегрирования каждая из искоемых функций u, p, v, E определяется на некотором множестве D_u, D_p, D_v, D_E , являющимся подмножеством множества D . Из (9) следует, что при условии отсутствия интерполяций множества D_p, D_v, D_E должны совпадать, т. е. $D_p = D_v = D_E$. Множество D_u выберем так, что $D_u + D_p = D$. Точки множества D_u будут соответствовать целым значениям индекса i , точки множества D_p и, соответственно, D_v и D_E — дробным значениям индекса i . Границы области интегрирования будем считать точками множества D_u . Направление роста i совпадает с направлением оси Ox . Для нахождения приближенного решения (1) используем следующую систему разностных уравнений:

$$u_i^{n+1} - u_i^n = -\frac{\tau}{h} \left[(p_+)_i^n - (p_+)_i^{n-1} \right], \quad (11)$$

$$v_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{\tau}{h} (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}), \quad (12)$$

$$E_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - E_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left[(p_+)_i^{n+1} + (p_+)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right] \left(v_{i-\frac{1}{2}}^n - v_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right), \quad (13)$$

$$p_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = f \left(v_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, E_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right). \quad (14)$$

Уравнения (11)–(14) используются как для расчета R -волн, так и для расчета S -волн. Различие состоит только в разных способах вычисления величины p_+ . В случае, если $u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} \geq 0$ (R -волна), величина $(p_+)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}$ определяется соотношением $(p_+)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = p_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}$. Легко проверить в этом случае, что решение уравнений (11)–(14) аппроксимирует решение системы (1) с точностью $O(\tau^2)$ при законе предельного перехода $\frac{\tau}{h} = \text{const}$. В случае, если $u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} < 0$ (S -волна), величина $(p_+)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}$ находится из уравнений, эквивалентных (2). Известные величины выбираются следующим образом:

$$\begin{aligned} v_- &= v_{i-\frac{1}{2}}^n, \\ p_- &= p_{i-\frac{1}{2}}^n, \\ E_- &= E_{i-\frac{1}{2}}^n, \end{aligned} \quad (15)$$

$$u_+ - u_- = \pm (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}).$$

В результате такого выбора вместо (2) получим

$$(v_+)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i-\frac{1}{2}}^n = \mp \frac{1}{w_{i-\frac{1}{2}}} (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}), \quad (16)$$

$$\pm (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) = \frac{1}{w_{i-\frac{1}{2}}} \left[(p_+)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - p_{i-\frac{1}{2}}^n \right], \quad (17)$$

$$(E_+)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - E_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left[(p_+)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + p_{i-\frac{1}{2}}^n \right] \left[v_{i-\frac{1}{2}}^n - (v_+)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right], \quad (18)$$

$$(p_+)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = f \left((v_+)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, (E_+)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right). \quad (19)$$

Система (16)–(19) используется для вычисления $(p_+)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}$. Для уравнения состояния

$$p = (\gamma - 1) E \frac{1}{v} \quad (20)$$

решение этой системы может быть записано в виде

$$(p_+)^{n+1}_{i-\frac{1}{2}} = p^n_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\gamma+1}{4} \frac{\Delta u^2}{v^n_{i-\frac{1}{2}}} + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} \frac{\Delta u^2}{v^n_{i-\frac{1}{2}}}\right)^2 + \frac{\gamma p^n_{i-\frac{1}{2}}}{v^n_{i-\frac{1}{2}}} \Delta u^2}, \quad (21)$$

где

$$\Delta u^2 = (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})^2.$$

Предположим далее, что функции u , p , v , E , p_+ непрерывны в области интегрирования системы (1) и на множестве D принимают значения u_i^n , $p_{i-\frac{1}{2}}^n$, $v_{i-\frac{1}{2}}^n$, $E_{i-\frac{1}{2}}^n$, $(p_+)^n_{i-\frac{1}{2}}$. Переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$ и используя формулу конечных приращений из (21), получим

$$p_+ = p + \varepsilon, \quad (22)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\gamma+1}{4v} h^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \sqrt{\left[\frac{\gamma+1}{4v} h^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^2 + \frac{\gamma p}{v} h^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}. \quad (23)$$

Величину ε можно трактовать как „вязкость“, введенную в исходные уравнения (1). Из (23) следует, что полученный таким образом „вязкий“ член является малой величиной порядка h . В случае, когда

$$\left|\frac{\gamma+1}{4v} h \frac{\partial u}{\partial x}\right| \gg \sqrt{\frac{\gamma p}{v}}, \quad (24)$$

ε принимает вид

$$\varepsilon = \frac{\gamma+1}{2} \frac{h^2}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \quad (25)$$

В случае, когда

$$\left|\frac{\gamma+1}{4v} h \frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll \sqrt{\frac{\gamma p}{v}},$$

ε принимает вид

$$\varepsilon = -\sqrt{\frac{\gamma p}{v}} h \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (26)$$

Таким образом, полученный нами „вязкий“ член на сильных сжатиях является квадратичным и действует аналогично вязкому члену Неймана, на слабых сжатиях — линейным.

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p + \varepsilon) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial t} (pv) + (p + \varepsilon) \frac{\partial v}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

отличную от (1) тем, что тут в уравнения входит функция ε , определяемая соотношением (23). Исследуем, будет ли стационарная ударная волна, являющаяся разрывным решением системы (1), получена как предел решения системы (27) при $h \rightarrow 0$.

Решение (27) будем искать в виде

$$u = u(\xi), \quad p = p(\xi), \quad v = v(\xi), \quad (28)$$

где $\xi = x - Dt$. Переходя к переменной ξ , вместо (27) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой запишется в виде

$$\begin{aligned} Dv + u &= c_1, \\ -Du + p + \varepsilon &= c_2, \\ \frac{1}{\gamma - 1}pv - \frac{1}{D}c_2u - \frac{1}{2}u^2 &= c_3. \end{aligned} \quad (29)$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 находятся из условий

$$\begin{aligned} u \rightarrow u_1, \quad p \rightarrow p_1, \quad v \rightarrow v_1, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow +\infty, \\ u \rightarrow u_2, \quad p \rightarrow p_2, \quad v \rightarrow v_2, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (30)$$

в виде

$$\begin{aligned} c_1 &= Dv_1 + u_1 = Dv_2 + u_2, \\ c_2 &= p_1 - Du_1 = p_2 - Du_2, \\ c_3 &= \frac{1}{\gamma - 1}p_1v_1 - \frac{p_1 - Du_1}{D}u_1 - \frac{1}{2}u_1^2 = \\ &= \frac{1}{\gamma - 1}p_2v_2 - \frac{p_2 - Du_2}{D}u_2 - \frac{1}{2}u_2^2. \end{aligned} \quad (31)$$

К соотношениям (29) добавим еще выражение для ε :

$$\varepsilon = \frac{\gamma + 1}{4v} h^2 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 + \sqrt{\frac{\gamma p}{v} h^2 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 + \left[\frac{\gamma + 1}{4v} h^2 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 \right]^2}, \quad (32)$$

преобразуя которое, получим

$$\varepsilon^2 - \varepsilon \frac{\gamma + 1}{2v} h^2 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 - \frac{\gamma p}{v} h^2 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 = 0. \quad (33)$$

Отсюда

$$\left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{h^2 \left(\frac{\gamma p}{v} + \frac{\gamma + 1}{2v} \varepsilon \right)}. \quad (34)$$

Выразив из (29) p, v и E через u и подставив в (34), после несложных преобразований получим

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{(u_2 - u)(u - u_1)}{hf(u)}, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{2}{\gamma + 1} \sqrt{\frac{1}{D} \left\{ \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^2 D(u_2 - u)(u - u_1) + \gamma(\gamma - 1) \left[D \frac{p_{1(2)} v_{1(2)}}{\gamma - 1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (p_{1(2)} - Du_{1(2)})(u - u_{1(2)}) - \frac{D}{2}(u^2 - u_{1(2)}^2) \right] \right\}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Из (36) следует, что

$$\lim_{\substack{u \rightarrow u_1 \\ u \rightarrow u_2}} f(u) = \text{const.} \quad (37)$$

Из (35) получим выражение для области на оси ξ , в которой происходит изменение u от u_1 до u_2 ,

$$\Delta\xi = h \int_{u_1}^{u_2} \frac{f(u) du}{(u_2 - u)(u - u_1)}. \quad (38)$$

Из расходимости интеграла при постоянном $h \neq 0$ следует, что эта область бесконечна. Но $\Delta\xi \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, так как интеграл расходится, как $\ln h$. Поэтому при достаточно малых h значения $u_1 + \alpha$ и $u_2 - \alpha$, где α — малое число, достигаются достаточно быстро, и практически $\Delta\xi$ оказывается конечной. Кроме того, тот факт, что $\Delta\xi \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, означает, что решение системы (27) сходится к решению системы (1), являющемуся стационарной ударной волной.

Продифференцировав (35) n раз, легко проверить, что полученная нами „вязкость“ дает монотонный профиль, имеющий гладкое сопряжение с постоянными решениями u_1 и u_2 , иными словами,

$$\frac{d^n u}{d\xi^n} \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \pm \infty \quad (39)$$

и

$$\frac{du}{d\xi} \neq 0 \text{ при } u_1 < u < u_2.$$

Аналогичное исследование [1] для метода Неймана дает существенно отличный результат. Область $\Delta\xi$, в которой происходит изменение u от u_1 до u_2 в методе Неймана всегда конечна, а в точках сопряжения уже вторая производная разрывна. При численном решении задачи о распространении стационарной ударной волны различия между изложенным методом и методом Неймана увеличиваются. Профили величин u , p , v , E , полученные при численном решении этой задачи методом Неймана всегда немонотонны, что приводит к искажениям решения за пределами интервала $\Delta\xi$. При расчете той же задачи предлагаемым методом соответствующие профили являются строго монотонными, а на решение за пределами интервала $\Delta\xi$ не накладывается никаких возмущений.

Линеаризуя уравнения (11) — (13) и применяя метод исследования устойчивости, изложенный в [1], для идеального газа в случае, когда

$$\epsilon = -C_{i-\frac{1}{2}}^n (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}), \quad (40)$$

где $C_{i-\frac{1}{2}}^n = \sqrt{\frac{\gamma p_{i-\frac{1}{2}}^n}{v_{i-\frac{1}{2}}^n}}$ получим критерий устойчивости $\frac{\tau c}{h} \leq \frac{1}{2}$.

Если же ϵ используется в виде (21), критерий устойчивости установлен экспериментально. Тогда шаги τ и h удовлетворяют условию $\frac{\tau c}{h} \leq 1$. При расчетах с помощью описанного метода сильные разрывы, как правило, размываются на 3—6 интервалов сетки.

Полученный результат легко обобщается на случай сферически симметричных и цилиндрически симметричных течений. В общем случае разностные уравнения (11), (12) принимают вид

$$u_i^{n+1} - u_i^n = -\frac{(x_i^n)^2 \tau}{h} \left[(p_+)_i^{n+\frac{1}{2}} - (p_+)_i^{n-\frac{1}{2}} \right], \quad (41)$$

$$v_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{\tau}{h} [(x_i^n)^\alpha u_i^{n+1} - (x_{i-1}^n)^\alpha u_{i-1}^{n+1}], \quad (42)$$

где $\alpha = 0, 1, 2$ соответствует плоскому, цилиндрическому и сферическому случаям. Уравнения (13), (14), (16) — (19) не меняются для всех трех случаев.

С помощью изложенного метода кроме описанной схемы могут быть получены также и другие в классе однородных разностных схем.

Считаю своим долгом поблагодарить Н. Н. Яненко за советы, данные при выполнении этой работы.

г. Челябинск

Поступило
28 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Neuman, R. Richtmyer. A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks. J. Appl. Phys., 21, 232, 1950.
2. P. D. Lax. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Commun. Pure and Appl. Math., 7, № 1, 1954.
3. С. К. Годунов. Разностный метод расчета ударных волн. УМН, т. XII, вып. 1 (73), 1957.
4. Л. Ландау, Е. Лифшиц. Механика сплошных сред. ОГИЗ Гостехиздат, М.—Л., 1944.
5. Р. Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач. ИИЛ, М., 1960.
6. С. К. Годунов. Разностный метод счета разрывных решений уравнений газодинамики. Матем. сб., т. 47 (89): 3, 1959.