

ЯВНЫЙ БЕЗУСЛОВНО УСТОЙЧИВЫЙ РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ*

В. Ф. КУРОПАТЕНКО

*Российский федеральный ядерный центр — Всесоюзный
научно-исследовательский институт технической физики
Снежинск, Россия*

Рассматривается явный безусловно устойчивый разностный метод, в котором для расчета течений жидкости и в области сжатия применяется явный разностный метод с условием устойчивости Куранта, а для расчета характеристик в области разрежения применяется явный безусловно устойчивый разностный метод, построенный на переменном шаблоне, зависящем от шага по времени. Дается новое определение явных и неявных разностных схем для системы законов сохранения. Обсуждаются примеры эффективности предложенной разностной схемы.

Математическое моделирование распространения волн сжатия или разрежения в нестационарном потоке жидкости с включениями тонких пленок из более тяжелой или более легкой жидкости требует преодоления трудностей, возникающих из-за разномасштабности процессов. Есть разные пути решения этой проблемы. Рассмотрим один из них.

Пусть движение жидкости описывается системой законов сохранения в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(E + \frac{1}{2} U^2 \right) + \frac{\partial}{\partial m} (PU) = 0, \quad (3)$$

где V — удельный объем, U — массовая скорость, P — давление, E — удельная внутренняя энергия, t — время, m — массовая лагранжева координата.

Дифференциальные уравнения (1)–(3) аппроксимируем разностными уравнениями. В литературе известно много разностных схем, применяемых для численного интегрирования системы (1)–(3) и обладающих различными достоинствами и недостатками. Ограничимся обсуждением только двуслойных разностных схем (РС), связывающих решение в точках сетки для двух соседних моментов времени t^n и $t^{n+1} = t^n + \tau$. Все такие РС делятся на явные и неявные. Разностную схему

$$U^{n+1} = C_{n+1} U^n,$$

*© В. Ф. Куропатенко, 1996.

где оператор шага $C_{n+1}(\tau, h, T) = \beta T^\beta$, T — оператор сдвига, β — матрица в 4-мерном пространстве компонент вектор-функции

$$U(m, t) = \{V(m, t), U(m, t), P(m, t), E(m, t)\},$$

$$\beta = -q_1, -q_1 + 1, \dots, q_2 - 1, q_2, \quad q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0, \quad q_1 + q_2 \geq 1,$$

будем называть явной, если для любого наперед заданного Q из промежутка $[1, N)$, где N — число точек сетки в области интегрирования, найдется такое $\tau > 0$, что $q(\tau) = q_1 + q_2 \leq Q$. В противном случае разностную схему будем называть неявной.

Как правило, явные РС условно устойчивы [1–3]. Условие устойчивости формулируется в виде ограничений на соотношение шагов сетки по времени и по лагранжевой координате. В случае, когда различные фрагменты рассчитываемой системы имеют разные размеры, шаг по времени выбирается по малому элементу системы и оказывается неоправданно малым для больших элементов той же системы. Таким образом, применение явных условно устойчивых РС для расчета течений с разномасштабными элементами оказывается экономически невыгодным. В качестве примера рассмотрим, как влияет тонкая прослойка на увеличение времени решения на ЭВМ задачи о распространении ударной волны в одномерной системе размером H . Ударная волна, распространяющаяся со скоростью W , проходит всю область H за время T . Требуется определить состояние системы в момент времени $5T$. Будем считать ударную волну слабой и положим $W = \text{const}$. В однородных явных условно устойчивых РС ударная волна проходит одну точку сетки за ~ 5 шагов по времени. Если в области интегрирования взять N точек сетки по пространству и на расчет всех величин в одной точке потратить μ операций, то для расчета задачи потребуется $25\mu N^2$ операций. Изменим систему, поместив внутри области H тонкую прослойку толщиной h . Возьмем в прослойке n точек по пространству. Значения h и n таковы, что $\frac{H}{N} \gg \frac{h}{n}$ и, следовательно, шаг по времени выбирается в точках прослойки. В этом случае на решение задачи потребуется затратить $25\mu n(N+n)\frac{H}{h}$ операций. Таким образом, количество операций возрастает в $\varphi \approx \frac{n(N+n)H}{N^2h}$ раз. Если применяемая ЭВМ такова, что на решение задачи без прослойки при $N = 100$ требуется ~ 20 мин, то для решения задачи с прослойкой при $n = 10, h = 10^{-3}H$ потребуется более 30 часов. Если же решение в прослойке требуется найти с более высокой точностью, то $n = 10$ недостаточно. Но уже при $n = 50$ время решения задачи с прослойкой возрастет до ~ 250 часов.

Безусловно, при разных $\frac{n}{N}$ и $\frac{h}{H}$ количественные результаты будут разными, но качественный вывод сохранится: для решения задач с тонкими прослойками требуется затратить заметно больше ресурсов ЭВМ.

В течение многих лет для решения таких задач применялись неявные, как правило, безусловно устойчивые РС. Применение неявных РС требует на каждом шаге по t решения системы сеточных уравнений, число которых равно числу точек сетки по пространству. В случае нелинейных уравнений возникает необходимость проведения итераций по нелинейности, что приводит к росту затрат времени ЭВМ. Эти затраты особенно возрастают при использовании сложных уравнений состояния.

В массивно параллельных ЭВМ использование неявных безусловно устойчивых РС снижает эффективность ЭВМ из-за необходимости обмена данными между процессорами на каждой итерации.

Кроме условия устойчивости, ограничивающего отношение шагов по t и m , во всех РС, явных и неявных, условно и безусловно устойчивых, существует условие точности. Это условие формулируется также в виде ограничения на соотношение шагов сетки по времени и по лагранжевой координате и зависит от решения.

В данной работе построена такая явная разностная схема для системы законов сохранения (1)–(3), в которой условие устойчивости трансформируется в условие для выбора числа точек в момент t^n , по которым находится решение в заданной точке в момент t^{n+1} . Иными словами, сеточный шаблон, на котором определяются разностные уравнения, зависит от шага τ . В целом разностная схема с переменным шаблоном оказывается безусловно устойчивой. Идея построения такой разностной схемы впервые изложена в [4], где построена явная разностная схема, в которой ограничение на соотношение шагов τ и h заменяется условием для определения в момент t^n основания характеристического треугольника, по которому проводится суммирование значений давлений и скоростей для определения вспомогательных значений этих величин. Область применимости разностной схемы [4] ограничена только гладкими течениями без ударных волн.

Рассмотрим комбинированную разностную схему, в которой для расчета ударных волн используется метод из [3], а адиабатические гидродинамические течения рассчитываются с помощью явной безусловно устойчивой разностной схемы, идейно близкой к разностной схеме из [4].

Аппроксимируем уравнения (1), (2) разностными уравнениями

$$\frac{V_{i+0.5}^{n+1} - V_{i+0.5}^n}{\tau} - \frac{U_{i+1}^* - U_i^*}{h} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{P_{i+0.5}^* - P_{i-0.5}^*}{h} = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим два типа решений: адиабатические волны разрежения (R -волна) и неадиабатические волны сжатия (S -волна). В случае S -волны ($\partial U/\partial x < 0$) вспомогательные значения P^* и U^* определим следующим образом:

$$U_i^* = U_i^{n+1}; P_{i+0.5}^* = \bar{P}_{i+0.5}^n. \quad (6)$$

Далее найдем вспомогательное значение $\bar{P}_{i+0.5}^n$. Предположим, что в сеточном интервале $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ распространяется ударная волна, на фронте которой справедливы уравнения

$$(V_+ - V_-)W + (U_+ - U_-) = 0, \quad (7)$$

$$(U_+ - U_-)W - (P_+ - P_-) = 0, \quad (8)$$

$$E_+ - E_- + 0.5(P_+ + P_-)(V_+ - V_-) = 0, \quad (9)$$

где величины с индексом “-” характеризуют состояние перед фронтом разрыва, а с индексом “+” за фронтом. Будем считать, что

$$P_- = P_{i+0.5}^n; \rho_- = \rho_{i+0.5}^n; E_- = E_{i+0.5}^n,$$

$$\Delta U = U_+ - U_- = U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}.$$

Поскольку $P_{i+0.5}^n$, $\rho_{i+0.5}^n$, $E_{i+0.5}^n$, U_{i+1}^{n+1} , U_i^{n+1} известны, то уравнения (7)–(9) вместе с уравнением состояния

$$P = P(\rho, E) \quad (10)$$

образуют систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными P_+ , ρ_+ , E_+ , W . Решив эту систему, найдем P_+ и положим

$$\bar{P}_{i+0.5}^{n+1} = P_+. \quad (11)$$

Внутренняя энергия $E_{i+0.5}^{n+1}$ определяется из разностного уравнения

$$E_{i+0.5}^{n+1} = E_{i+0.5}^n - 0.5(\bar{P}_{i+0.5}^{n+1} + \bar{P}_{i+0.5}^n)(V_{i+0.5}^{n+1} - V_{i+0.5}^n), \quad (12)$$

совпадающего с уравнением ударной адиабаты. Таким образом, обеспечивается правильное изменение энтропии при переходе от E^n к E^{n+1} в "размазанной ударной волне". В работе [2] показано, что рассмотренная РС для S -волны условно устойчива и шаги τ и h должны удовлетворять условию

$$\frac{\tau a}{h} < 1, \quad (13)$$

где a — массовая скорость звука, определяемая уравнением

$$a^2 = - \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S. \quad (14)$$

В случае R -волны вспомогательные значения P^* , U^* будем вычислять по формулам

$$P_{i+0.5}^* = 0.5(\beta_0 P_{i+0.5}^n + \sum_{\nu=-k_1}^{k_2} \beta_\nu P_{i+0.5+\nu}^n), \quad (15)$$

$$U_i^* = 0.5(\beta_0 U_i^{n+1} + \sum_{\nu=-k_1}^{k_2} \beta_\nu U_{i+\nu}^{n+1}), \quad (16)$$

где

$$\beta_\nu = \frac{h_{i+0.5+\nu}}{\tau a_{i+0.5+\nu}} \leq 1.$$

Значение ν в суммах (15), (16) увеличивается до тех пор, пока выполняются условия

$$\sum_{\nu=0}^{k_1-1} \beta_{-\nu} < 1; \quad \sum_{\nu=0}^{k_2-1} \beta_\nu < 1. \quad (17)$$

При нарушении условий (17)

$$\sum_{\nu=0}^{k_1-1} \beta_{-\nu} + \beta_{-k_1} \geq 1, \quad \sum_{\nu=0}^{k_2-1} \beta_\nu + \beta_{k_2} \geq 1$$

значения β_{-k_1} и β_{k_2} пересчитываются по формулам

$$\beta_{-k_1} = 1 - \sum_{\nu=0}^{k_1-1} \beta_{-\nu}, \quad \beta_{k_2} = 1 - \sum_{\nu=0}^{k_2-1} \beta_\nu.$$

При решении задачи о распространении ударной волны по однородному веществу шаг по времени τ будет выбираться в сеточных интервалах "i" с S -волной по условию

$$\frac{\tau a_i}{h_i} = 1. \quad (18)$$

При этом в интервалах с R -волной может оказаться

$$\beta = \frac{h_i}{\tau a_i} \geq 1. \quad (19)$$

Но тогда из (15)–(17) следует, что

$$P_{i+0.5}^* = P_{i+0.5}^n, \quad U_i^* = U_i^{n+1}. \quad (20)$$

РС с такими вспомогательными значениями P^* и U^* исследована в [3].

Рассмотрим погрешность аппроксимации уравнений (1), (2) разностными уравнениями (4), (5) со вспомогательными величинами (20). Условия точности получим, ограничив главные члены этих выражений

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tau - \frac{1}{24} \frac{\partial^3 U}{\partial m^3} h^2 \right| &\leq \varepsilon_1, \\ \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tau + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 P}{\partial m^3} h^2 \right| &\leq \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (21)$$

С помощью (1), (2) преобразуем (21) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} \left| \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial t} \tau - \frac{1}{24} \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} h^2 \right| &\leq \varepsilon_1, \\ \frac{\partial}{\partial m} \left| -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial t} \tau + \frac{1}{24} \frac{\partial^2 P}{\partial m^2} h^2 \right| &\leq \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Умножим каждое из этих неравенств на ∂m , проинтегрируем по m от 0 до h и запишем полученный результат в виде

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial t} \tau \right| - \left| \frac{1}{24} \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} h^2 \right| &\leq \varepsilon_1 h, \\ \left| \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial t} \tau \right| - \left| \frac{1}{24} \frac{\partial^2 P}{\partial m^2} h^2 \right| &\leq \varepsilon_2 h, \end{aligned} \quad (22)$$

Заменим $\frac{\partial U}{\partial t}$ на $-\frac{\partial P}{\partial m}$ и $\frac{\partial P}{\partial t}$ на $-a^2 \frac{\partial U}{\partial m}$. После этой замены и несложных преобразований условия точности примут вид

$$\tau_1 \leq \frac{2\varepsilon_1 h + \frac{1}{12} h^2 \left| \frac{\partial^2 U}{\partial m^2} \right|}{\left| \frac{\partial P}{\partial m} \right|}, \quad \tau_2 \leq \frac{2\varepsilon_2 h + \frac{1}{12} h^2 \left| \frac{\partial^2 P}{\partial m^2} \right|}{\left| a^2 \frac{\partial U}{\partial m} \right|}. \quad (23)$$

Заменим производные в (23) разностями, получим условия точности в виде

$$\tau_1 \leq h \frac{2\varepsilon_1 h + \frac{1}{12} |U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}|}{|P_{i+0.5} - P_{i-0.5}|}, \quad (24)$$

$$\tau_2 \leq h \frac{2\varepsilon_2 h + \frac{1}{12} |P_{i+1.5} - 2P_{i+0.5} + P_{i-0.5}|}{a_{i+0.5}^2 |U_{i+1} - U_i|}, \quad (25)$$

В случае движений без ускорения и деформации $P_{i+0.5} = P_{i-0.5}$, $U_{i+1} = U_i$ и из (24), (25) следует, что $\tau_1 \leq \infty$, $\tau_2 \leq \infty$, т.е. условия точности не дают ограничений на τ .

В адиабатическом течении внутренняя энергия и давление вдоль траектории частицы зависят только от V . Изменения P и E при изменении V определяется системой уравнений

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = 0, \quad P = P(V, E), \quad (26)$$

где $V = \frac{1}{\rho}$. Первое из этих уравнений является следствием трех законов сохранения (1)–(3). Запишем его в виде

$$E^{n+1} = E^n - \int_{V^n}^{V^{n+1}} P(V, E) dV. \quad (27)$$

Заменим интеграл интегральной суммой

$$E^{n+1} = E^n - \sum_{k=0}^z P_k(V_k, E_k)(V_{k+1} - V_k), \quad (28)$$

где число слагаемых z выбирается так, чтобы обеспечить нужную точность интегрирования вдоль изэнтропы. Значения V_{k+1} , E_{k+1} определяются из уравнений

$$V_{k+1} = V^n + \frac{k+1}{z+1}(V^{n+1} - V^n), \quad (29)$$

$$E_{k+1} = E_k - \frac{1}{z+1} P_k(V_k, E_k)(V^{n+1} - V^n), \quad (30)$$

а давление P_{k+1} — из уравнения состояния

$$P_{k+1} = P(V_{k+1}, E_{k+1}).$$

При использовании изложенной разностной схемы для расчета характеристик движения жидкости с ударными волнами шаг по времени τ выбирается лишь в интервалах сетки, где решение является S -волной:

$$\tau = \min\{\tau_i(S)\}, \quad (31)$$

здесь $\tau_i(S) = \frac{h_i}{a_i}$. При этом в некоторых интервалах сетки с R -волной может оказаться, что $\frac{\tau a_i}{h_i} > 1$. В этих интервалах вспомогательные значения U_i^* и $P_{i+0.5}^*$ выбираются с помощью уравнений (15), (16).

Достоинства изложенной РС проявляются особенно при расчете распространения ударной волны по веществу А, содержащему тонкий слой другого вещества Б. В явлении выделим три этапа.

1 ЭТАП. Ударная волна распространяется по веществу А и не дошла до прослойки Б. В этом случае шаг по времени выбирается из условий (31) в тех интервалах сетки,

где течение есть S -волна. В остальных интервалах сетки, где решение является R -волной, ограничение на шаг τ снимается применением изложенной выше схемы.

2 ЭТАП. Ударная волна проходит через вещество Б. Пусть для определенности шаг h_B пространственной сетки в этом тонком слое в k раз меньше h_A . Поскольку в интервалах сетки в веществе Б решение есть S -волна, то шаг по времени будет выбираться из условия

$$\tau \leq \frac{h_B}{a_B} = \frac{h_A}{ka_B}.$$

Если $a_B \approx a_A$, то при прохождении ударной волной тонкой прослойки Б общий шаг по времени уменьшится в k раз.

3 ЭТАП. Ударная волна ушла от прослойки Б. В этом случае шаг по времени выбирается, как на этапе 1, то есть снова возрастает в k раз.

Рассмотрим две задачи с тонкими прослойками.

ЗАДАЧА 1. Жесткость вещества Б (прослойка) выше, чем жесткость вещества А ($\rho_{БСБ} > \rho_{АСА}$).

Расчеты проводились для системы $0 \leq x \leq 100$, причем в областях $0 \leq x < 50$; $50.1 < x \leq 100$ находится вещество А с параметрами $P_0 = 0$, $\rho_0 = 1$, $E_0 = 0$, $U_0 = 0$, а в области $50 \leq x \leq 50.1$ находится вещество Б с начальными параметрами $P_0 = 0$, $\rho_0 = 10$, $E_0 = 0$, $U_0 = 0$. Уравнения состояния были взяты в виде

$$\text{А: } P = (\gamma - 1)\rho E, \quad \gamma = 5/3;$$

$$\text{Б: } P = (\gamma - 1)\rho E + C_{0k}^2(\rho - \rho_{0k}), \quad \rho_{0k} = 10, C_{0k} = 5, \gamma = 3.$$

В качестве краевого условия при $x = 0$ бралось $U = 0.5$.

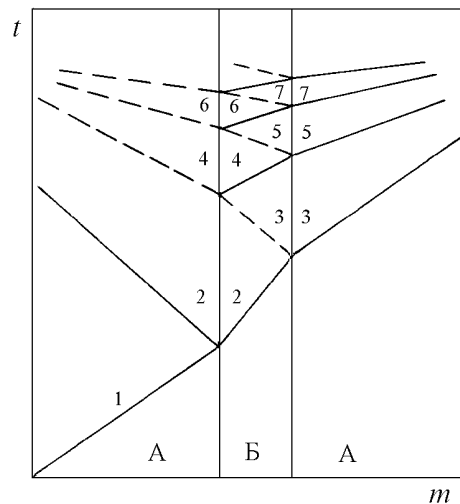


Рис. 1.

Таким образом, в точке $t = 0$, $x = 0$ имеется сильный разрыв — ударная волна с параметрами $P_1 = 0.333$, $U_1 = 0.5$. В момент прихода этой волны на прослойку образуются отраженная и прошедшая ударные волны. После выхода ударной волны на вторую границу прослойки происходит распад разрыва с образованием прямой ударной волны и отраженной волны разрежения. Амплитуда этой ударной волны меньше, чем амплитуда прошедшей ударной волны. Далее начинается взаимодействие волны разрежения с контактной

границей и образование новых волн сжатия и разрежения. Вслед за прошедшей волной прослойка излучает волны сжатия и ударные волны, в противоположном направлении — волны разрежения. Вследствие этого амплитуда прошедшей ударной волны возрастает, а отраженной — уменьшается. Через некоторое время амплитуда прошедшей ударной волны становится равной амплитуде падающей волны: ударная волна “забывает” прослойку.

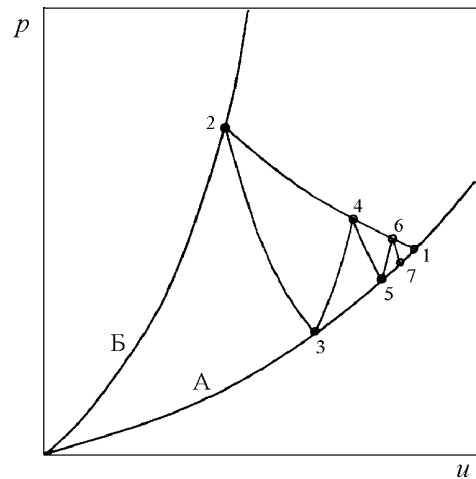


Рис. 2.

Результаты расчетов приведены на рис. 1, 2 и в табл. 1. На рис. 1 схематически изображена волновая картина в переменных m, t , а на рис. 2 — состояния в прослойке и на прошедшей и отраженной волнах в переменных P, U . Пунктиром (см. рис. 1) обозначены траектории волн разрежения.

Таблица 1

№п.п.	x	P	U	$\varphi = \frac{x - 50.1}{0.1}$	$\psi = \frac{P - P_1}{P_1}$
1	50.00	0.333	0.500	-1	0
2	50.10	1.807	0.036	0	4.426
3	50.41	0.249	0.433	3.1	-0.25
4	50.88	0.316	0.487	7.8	-0.05
5	51.40	0.332	0.500	13	-0.003
6	51.93	0.336	0.502	18.3	0.009
7	52.46	0.336	0.502	23.6	0.009
8	52.98	0.335	0.501	28.8	0.006
9	55.09	0.335	0.501	49.9	0.006
10	57.20	0.335	0.501	71	0.006
11	59.31	0.334	0.501	92.1	0.003
12	67.24	0.333	0.500	171.4	0

В таблице приведены зависимости давления и массовой скорости на фронте прошедшей ударной волны в зависимости от координаты фронта волны. Расчеты показывают, что на расстоянии порядка 15 толщин прослойки давление на прошедшей волне меньше, чем на падающей. Максимальное отклонение в этой области достигает 25 %. Затем давление

становится больше. Область избыточного давления находится расстоянии примерно от 15 до 100 толщин прослойки. При $\varphi > 100$ амплитуда прошедшей ударной волны становится равна амплитуде падающей. Максимальное превышение давления на фронте прошедшей волны давлением на фронте падающей волны для данной пары веществ составило 1 %.

Задача решалась по РС 1 из работы [2], по изложенной выше РС и по схеме из [5] с выделением разрывов до выхода прошедшей ударной волны на правую границу системы с координатой $x = 100$. В изложенной выше схеме затраты времени ЭВМ для решения задачи оказались в 17 раз меньше.

ЗАДАЧА 2. Жесткость вещества Б (прослойки) меньше, чем жесткость вещества А ($\rho_{БСБ} < \rho_{АСА}$).

Расчеты проводились для системы $0 \leq x \leq 100$, однако в областях $0 \leq x < 50$, $50.1 < x \leq 100$ находилось вещество А с начальными параметрами $P_0 = 0$, $\rho_0 = 10$, $E_0 = 0$, $U_0 = 0$. В области $50 \leq x \leq 50.1$ находилось вещество Б с начальными параметрами $P_0 = 0$, $\rho_0 = 1$, $E_0 = 0$, $U_0 = 0$. Для вещества А было взято уравнение состояния

$$P = (\gamma - 1)\rho E + C_{0k}^2(\rho - \rho_{0k}), \quad \text{где } \rho_{0k} = 10, C_{0k} = 5, \gamma = 3,$$

для вещества Б — уравнение состояния

$$P = (\gamma - 1)\rho E, \quad \text{где } \gamma = 5/3.$$

В качестве краевого условия при $x = 0$ было взято значение $U = 5$.

В точке $t = 0$, $x = 0$ образуется ударная волна с параметрами $P = 603.5$, $U = 5.0$. В момент прихода этой ударной волны на прослойку образуются отраженная волна разрежения и прошедшая ударная волна. После ее выхода на вторую границу прослойки происхо-

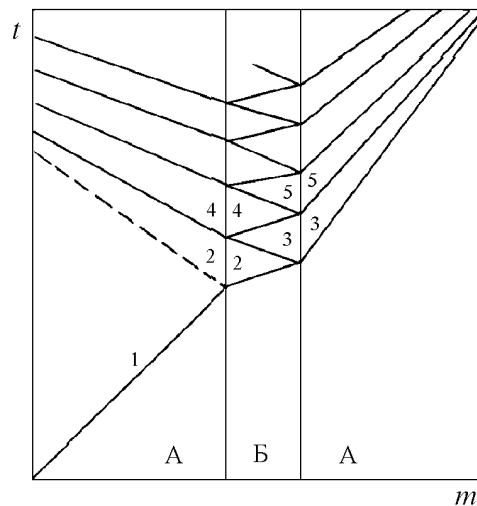


Рис. 3.

дит распад разрыва с образованием отраженной и прошедшей ударных волн. Отраженная волна порождает в прослойке сложную волновую картину. В обе стороны от прослойки распространяются ударные волны. Часть этих волн дополняет прошедшую ударную волну, вследствие чего ее амплитуда возрастает.

Результаты расчетов показаны на рис. 3, 4 и в табл. 2. На рис. 3 схематически изображена получаемая в задаче 2 волновая картина в переменных m, t , а на рис. 4 — состояния

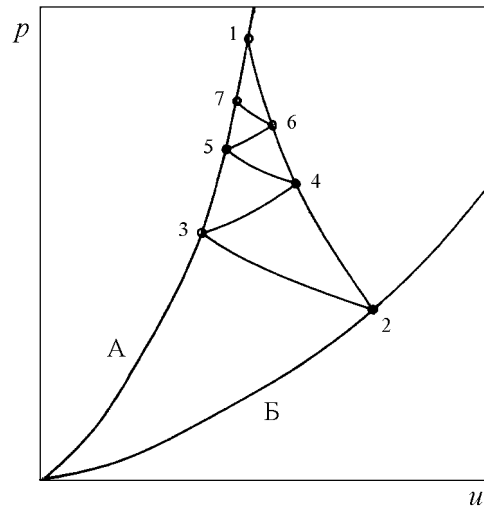


Рис. 4.

в прослойке и на прошедшей и отраженной волнах в переменных P, U .

Таблица 2

№п.п.	x	P	U	$\varphi = \frac{x - 50.1}{0.1}$	$\psi = \frac{P - P_1}{P_1}$
1	50.00	603.5	5.000	-1	0
2	50.10	104.6	8.860	0	-1.17
3	50.18	339.9	3.525	0.8	-0.44
4	50.21	554.1	4.754	1.1	-0.082
5	50.41	576.1	4.865	3.1	-0.045
6	50.71	713.1	5.508	6.1	0.18
7	51.00	669.9	5.313	9.0	0.11
8	51.33	637.3	5.161	12.3	0.056
9	51.91	605.1	5.007	18.1	0.0026
10	52.22	600.4	4.984	21.2	-0.0051
11	56.99	597.8	4.972	68.9	-0.0094
12	58.83	607.8	5.020	87.3	0.0071
13	60.36	605.7	5.010	102.6	0.0036
14	69.51	604.4	5.004	194.1	0.0015

В табл. 2 приведены изменения давления P , массовой скорости U на фронте прошедшей ударной волны в зависимости от координаты фронта и относительное отличие в давлении в зависимости от расстояния, выраженного в толщинах прослойки.

Расчеты показывают, что в веществе А за прослойкой есть область, где давление на фронте прошедшей ударной волны ниже, чем на фронте падающей (около пяти толщин прослойки), и это различие достигает 44 %. Затем следует область шириной примерно 15 толщин прослойки, где давление на фронте ударной волны выше, чем на фронте падающей. Это превышение достигает 18 %. Далее вплоть до 200 толщин прослойки имеется область отрицательного и положительного отклонения от амплитуды падающей волны, где отличия не превышают 1 %.

Задача решалась по РС 1 из [2] и по изложенной выше схеме до выхода ударной волны на правую границу системы с координатой $x = 100$. В этой схеме затраты времени ЭВМ для решения задачи оказались в ~ 50 раз меньше.

Возможности изложенной РС проверялись также при расчете волны разрежения в задаче с начальными данными $0 \leq x \leq 1$, $P_0 = 2$, $\rho_0 = 1.5$, $E_0 = 0.666$, $U_0 = 0$ при $t = 0$, краевыми условиями $U(0, t) = 0$, $U(1, t) = 1$ и уравнением состояния $P = (\gamma - 1)\rho E$ с $\gamma = 3$.

На рис. 5. приводятся профили давления P и скорости U на один из моментов времени (— — точное решение, \circ — результаты расчетов с $\tau a/h = 2$ при $h = 0.02$).

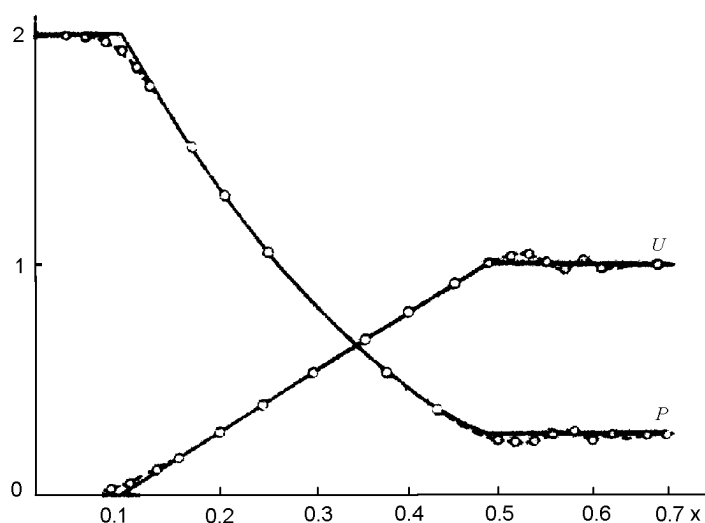


Рис. 5.

Устойчивость этой системы проверялась методом гармоник в акустическом случае и с помощью расчетов в нелинейном случае. Рассчитывалось распространение малых возмущений в покоящейся среде с параметрами: $U_0 = 0$, $\rho_0 = 1$, $P_0 = 1$, $E_0 = 0.5$, $P = (\gamma - 1)\rho E$, $\gamma = 3$, $0 \leq m \leq 1$. В трех точках ($m = 0.25, 0.5, 0.75$) значения E_0 и P_0 отличались от указанных на 1%. Счет велся с $\frac{\tau a}{h} = 10$, при $h = 0.02$. Через 20 шагов по времени возмущения “размазались” и амплитуда возмущений уменьшилась до 0.4%.

Список литературы

- [1] РИХТМАЙЕР Р., МОРТОН К. *Разностные методы решения краевых задач*. Мир, М., 1972.
- [2] РОЖДЕСТВЕНСКИЙ Б. Л., ЯНЕНКО Н. Н. *Системы квазилинейных уравнений*. Наука, М., 1978.
- [3] КУРОПАТЕНКО В. Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики. *Труды МИ АН СССР им. В.А. Стеклова*, **74**, ч. 1, 1966.

- [4] ГАДЖИЕВА В. В., КУРОПАТЕНКО В. Ф. О некоторых явных разностных схемах для уравнений гидродинамики. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **11**, №6, 1971, 1603.
- [5] КУРОПАТЕНКО В. Ф., ЕСКОВА Т. Е., КОВАЛЕНКО Г. В., КУЗНЕЦОВА В. И., МИХАЙЛОВА Г. И., ПОТАПКИН Б. К., САПОЖНИКОВА Г. Н. Комплекс программ "Волна" и неоднородный разностный метод для расчета неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред. *Вопросы атомной науки и техники, Сер. Математическое моделирование физических процессов*, вып. 2, 1989, 9–25.

Поступила в редакцию 8 августа 1996 г.