



О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ В ГАЗЕ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТИ

В.Ф. Куропатенко ^{1,2}, Е.С. Шестаковская ²

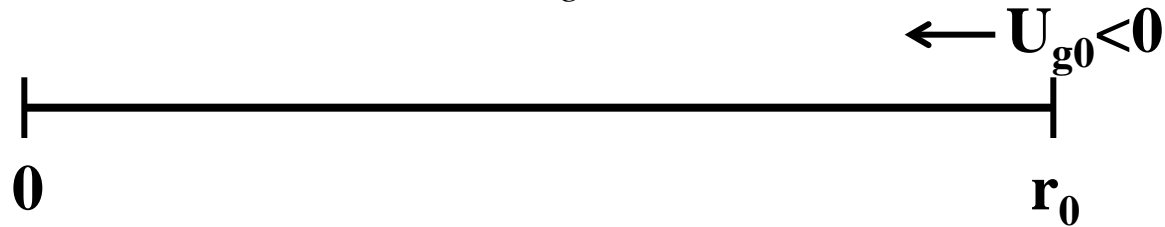
¹ Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е.И. Забабахина

Снежинск, Россия

*² Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет),*

Челябинск, Россия

При постановке задачи задаем четыре параметра с разными размерностями: U_{g0}, r_0, t_0, ρ_0 .



Начальные параметры газа: $\rho_0 = const, U_0 = 0, P_0 = 0, E_0 = 0$

Законы сохранения на ударной волне:

$$\rho_w (D - U_w) - \rho_0 D = 0, \quad (1)$$

$$\rho_0 D U_w - P_w = 0, \quad (2)$$

$$\rho_0 D \left(E_w + \frac{1}{2} U_w^2 \right) - P_w U_w = 0. \quad (3)$$

Уравнения (1)–(3) замыкаются уравнением состояния

$$P = (\gamma - 1) \rho E, \quad P = F(S) \rho^\gamma. \quad (4)$$

$$M_w = \frac{4}{3} \pi \rho_0 r_w^3 \quad - \text{ лагранжева координата ударной волны}$$

$$W = (3M_w)^{2/3} (4\pi\rho_0)^{1/3} D \quad - \text{ скорость ударной волны в лагранжевых координатах}$$

Выразив D и подставив в (1)–(3), получим условия на ударной волне, содержащие W и M_w

$$\left(\frac{1}{\rho_w} - \frac{1}{\rho_0} \right) W + (4\pi)^{1/3} \left(\frac{3M_w}{\rho_0} \right)^{2/3} U_w = 0, \quad (5)$$

$$U_w W - (4\pi)^{1/3} \left(\frac{3M_w}{\rho_0} \right)^{2/3} P_w = 0, \quad (6)$$

$$\left(E_w + 0,5U_w^2 \right) W - (4\pi)^{1/3} \left(\frac{3M_w}{\rho_0} \right)^{2/3} P_w U_w = 0. \quad (7)$$

Из (4), (5), (6) и (7) следуют выражения

$$\rho_w = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0,$$

$$U_w = \frac{2W}{(\gamma + 1)(4\pi\rho_0)^{1/3} (3M_w)^{2/3}},$$

$$P_w = \frac{2\rho_0^{1/3} W^2}{(\gamma + 1)(4\pi)^{2/3} (3M_w)^{4/3}},$$

$$F_w = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^\gamma \frac{W^2 \rho_0^{(1-3\gamma)/3}}{(4\pi)^{2/3} (3M_w)^{4/3}}.$$

Зададим траекторию УВ в виде

$$M_w = M_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n, \quad (8)$$

где t_f – время фокусировки.

$$W = W_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1},$$

где $W_0 = 3M_0^{2/3} (4\pi\rho_0)^{1/3} \frac{(\gamma+1)}{2} U_{g0}$,

$$t_f = t_0 - \frac{M_0 n}{W_0}.$$

Параметры адиабатического течения за ударной волной определяются уравнениями траектории, сохранения массы и движения

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_M - U = 0, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_M + 4\pi\rho^2 \frac{\partial(r^2 U)}{\partial M} = 0, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_M + 4\pi r^2 \frac{\partial(F\rho^\gamma)}{\partial M} = 0. \quad (11)$$

Перейдём в (9) - (11) к новым искомым функциям

$$R = r^3, \quad C = r^2 U.$$

После перехода уравнения (9)–(11) примут вид

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_M - 3C = 0, \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_M + 4\pi\rho^2 \frac{\partial C}{\partial M} = 0, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} \right)_M + 4\pi R^3 \frac{\partial (F\rho^\gamma)}{\partial M} - 2C^2 R^{-1} = 0. \quad (14)$$

Новые функции на ударной волне имеют вид

$$R_w = R_0 \frac{M_w}{M_0}, \quad C_w = C_0 \left(\frac{M_w}{M_0} \right)^{(n-1)/n}. \quad (15)$$

Перейдём от переменных t, M к переменным $t, \xi(t, M)$.

Зададим зависимость $\xi(t, M)$ в виде

$$\xi = \frac{M}{M_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{-n}. \quad (16)$$

С помощью уравнений для производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_M = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_\xi + \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_M, \quad \left(\frac{\partial}{\partial M} \right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial M} \right)_t,$$

где

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{n\xi}{t_f - t}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial M} = \frac{1}{M_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{-n},$$

преобразуем уравнения (12)–(14)

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial R}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_M - 3C = 0, \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_M + 4\pi\rho^2 \left(\frac{\partial C}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial M}\right)_t = 0, \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial C}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_M - \frac{2C^2}{R} + \quad (19)$$

$$+ 4\pi R^{\frac{4}{3}} \left[\rho^{\gamma} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial M}\right)_t + \gamma F \rho^{\gamma-1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial M}\right)_t \right] = 0.$$

Для разделения переменных представим R , ρ и C в виде произведений функций от времени и функций от ξ

$$R = \alpha_R(t)T(\xi) \quad \rho = \alpha_\rho(t)\delta(\xi) \quad C = \alpha_C(t)Z(\xi)$$

Получим эти зависимости на ударной волне, т.е. при $\xi=l$ с помощью (14) и (15)

$$R_w = R_0 \cdot \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n, \quad C_w = C_0 \cdot \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}. \quad (20)$$

Тогда

$$T_w = T_1, \quad \alpha_R(t) = R_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n T_1^{-1},$$

$$\delta_w = \delta_1, \quad \alpha_\rho = \rho_0 \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \delta_1^{-1}, \quad (21)$$

$$Z_w = Z_1, \quad \alpha_C(t) = C_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1} Z_1^{-1}.$$

Подставив (20),(21) в (17)–(19), получим три уравнения для T , δ и Z

$$\xi T' = A_1, \quad (22)$$

$$\delta_1 B_1 Z' - \xi Z_1 \delta' = 0, \quad (23)$$

$$-\xi Z_1^{-1} Z' + C_1 \gamma \xi \delta_1^{-1} \delta' = C_2, \quad (24)$$

где

$$A_1 = T - \frac{2ZT_1}{(\gamma+1)Z_1}, \quad B_1 = \frac{2\delta^2}{(\gamma-1)\delta_1^2}, \quad C_1 = \frac{T^{4/3}\delta^{\gamma-1}\xi^{-(n+6)/3n}}{T_1^{4/3}\delta_1^{\gamma-1}},$$

$$C_2 = \frac{4Z^2T_1}{3(\gamma+1)Z_1^2T} - \frac{(n-1)Z}{nZ_1} - C_1 \frac{2(n-3)\delta}{3n\delta_1}.$$

Уравнения (22) - (24) образуют относительно T', δ', Z' систему линейных неоднородных уравнений.

Определитель системы равен

$$\Delta = B_1 C_1 \gamma \xi - \xi^2.$$

Если $\Delta \neq 0$, то решение системы (22)–(24) имеет вид

$$T' = \frac{A_1}{\xi}, \quad \delta' = \frac{B_1 C_2 \delta_1}{\Delta}, \quad Z' = \frac{\xi C_2 Z_1}{\Delta}.$$

Значения n_* и ξ_* , при которых одновременно $\Delta(\xi_*)=0$ и $C_2(\xi_*)=0$, соответствующие значениям γ , приведены в таблице

γ	1.1	1.2	4/3	1.4	5/3
n_*	2.387916	2.271434	2.183068	2.151532	2.065135
ξ_*	7.959997	5.717071	4.559431	4.227062	3.481885

В области $n < n_*$ $\Delta(\xi) > 0$ для $1 \leq \xi < \infty$.

В области $n > n_*$ $\Delta(\xi_n) = 0$, но $C_2(\xi_n) \neq 0$. На границе газового шара при $M = M_0$ значение ξ_n достигается в момент

$$t_n = t_f - (t_f - t_0) \xi_n^{-1/n}.$$

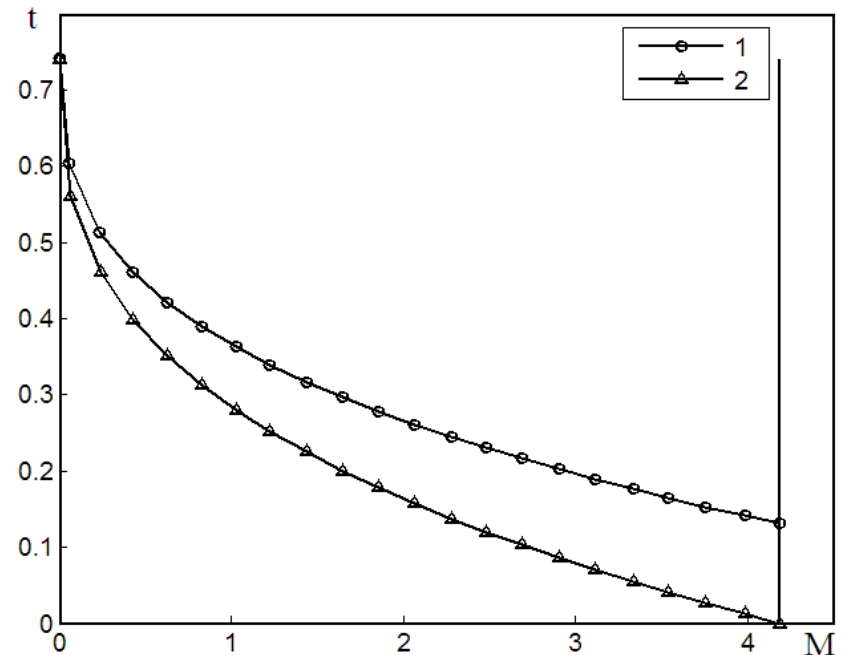
Из точки M_0, t_n выходит линия, на которой $\xi = \xi_n = \text{const}$.

Её уравнение

$$M = M_0 \xi_n \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n. \quad (25)$$

Это характеристика. Она фокусируется одновременно с ударной волной, т. к. при $t = t_f$ $M = 0$. В области между (25) и ударной волной (8) для каждого $n > n_*$ существует единственное решение.

На рис. 1 – характеристика,
2 – ударная волна.



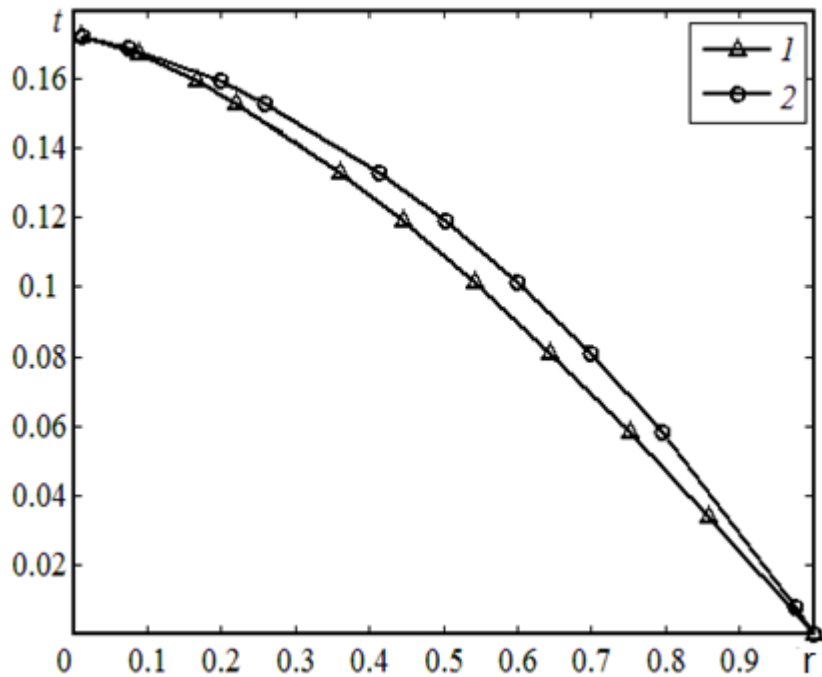


Рис. 1. 1 - траектория УВ,
2 – траектория правой границы
для $\gamma=5/3$ и $n=0,68$.

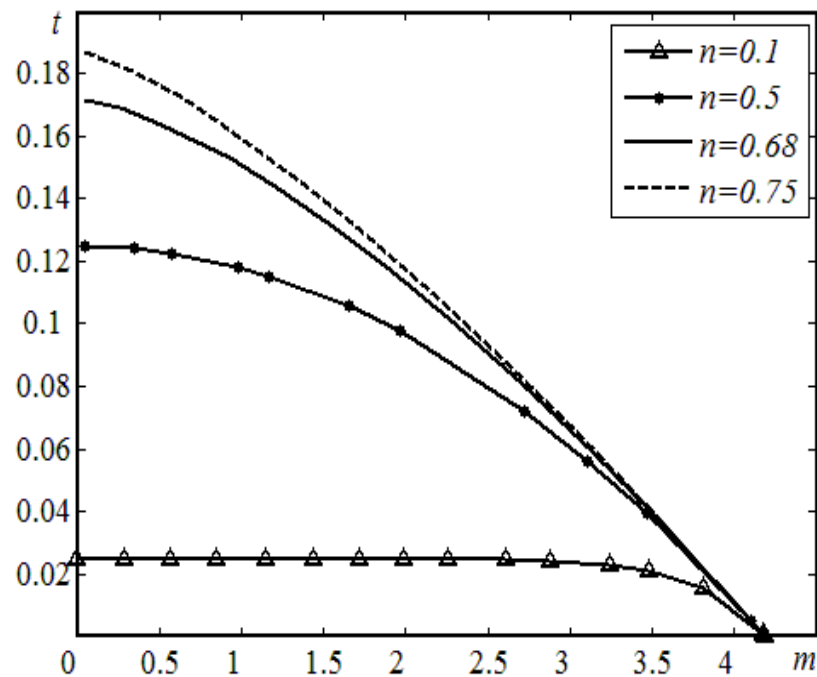


Рис. 2. Траектория УВ для $\gamma=5/3$
и четырех значений
 $n=0,1; 0,5; 0,68; 0,75$.

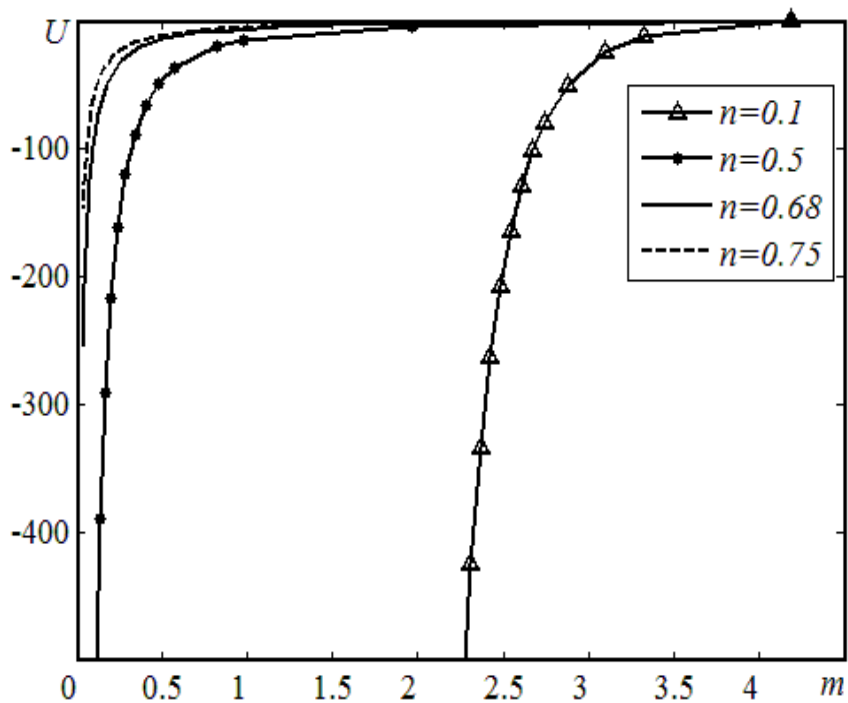


Рис. 3. Фрагмент зависимости скорости на фронте УВ от лагранжевой координаты для $\gamma=5/3$ и четырех значений $n=0,1; 0,5; 0,68; 0,75$.

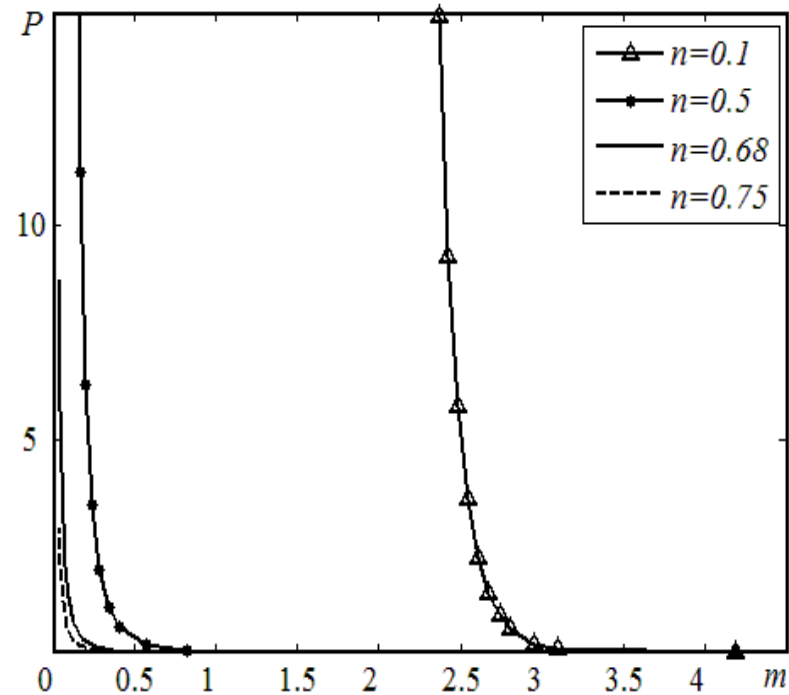


Рис. 4. Фрагмент зависимости давления на фронте УВ от лагранжевой координаты для $\gamma=5/3$ и четырех значений $n=0,1; 0,5; 0,68; 0,75$.

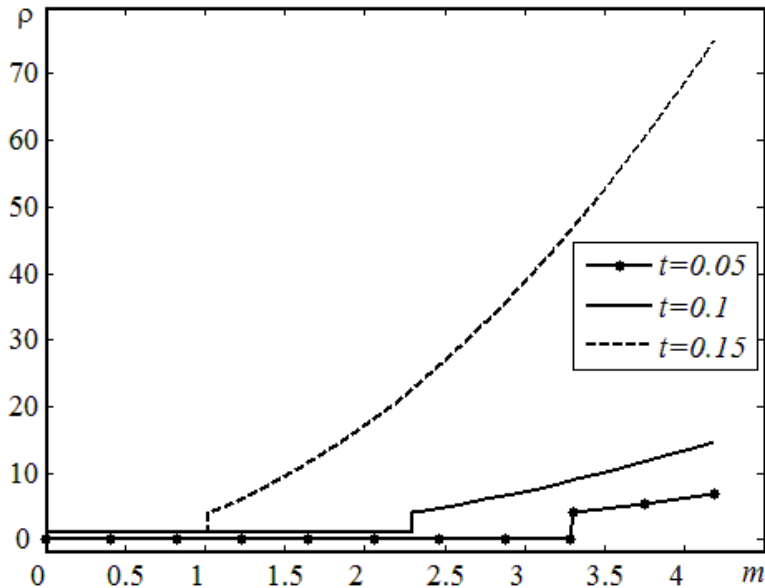
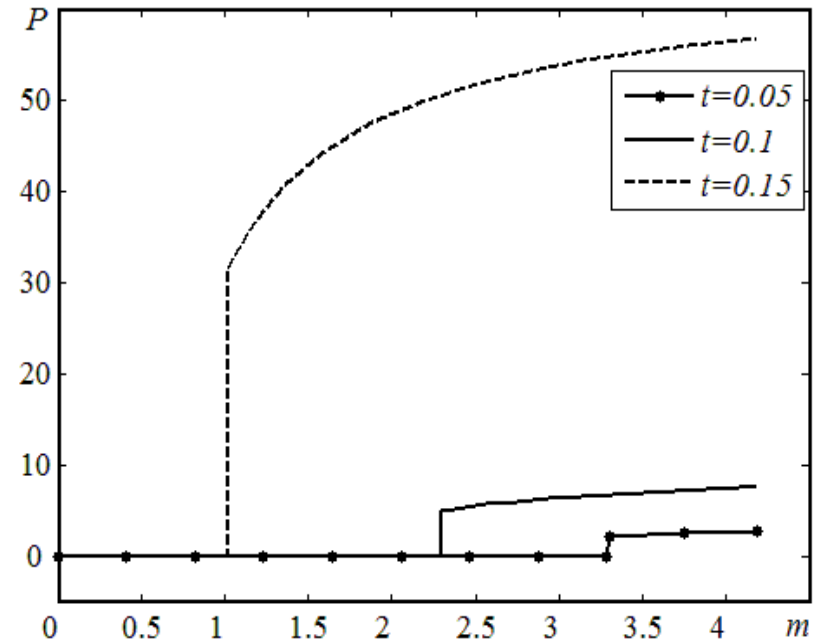
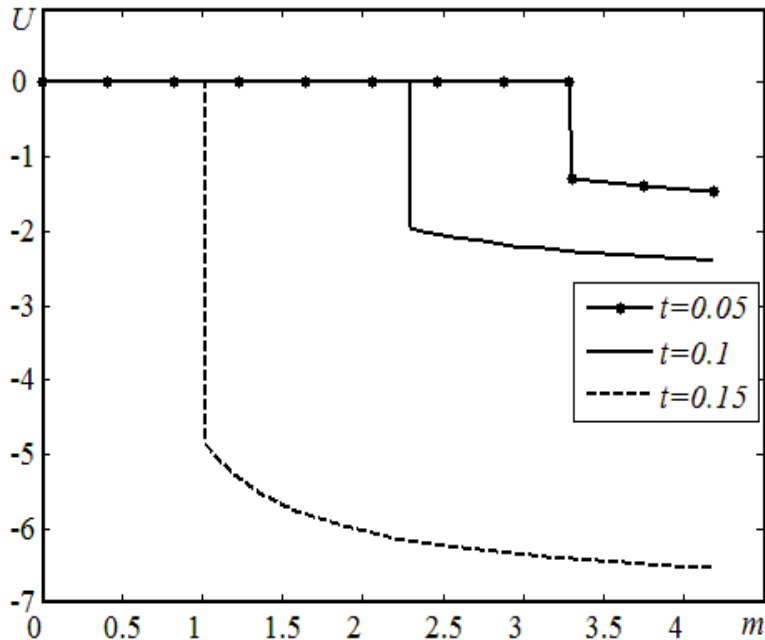


Рис. 5. Зависимости скорости, давления и плотности от лагранжевой координаты для $\gamma=5/3$, $n=0,68$ и трех моментов времени $t=0,05; 0,1; 0,15$.

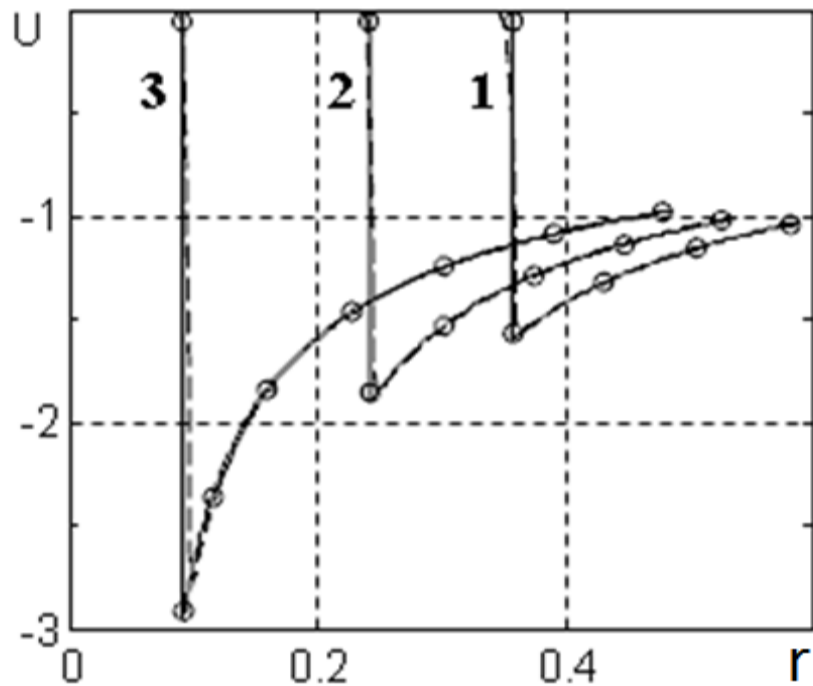
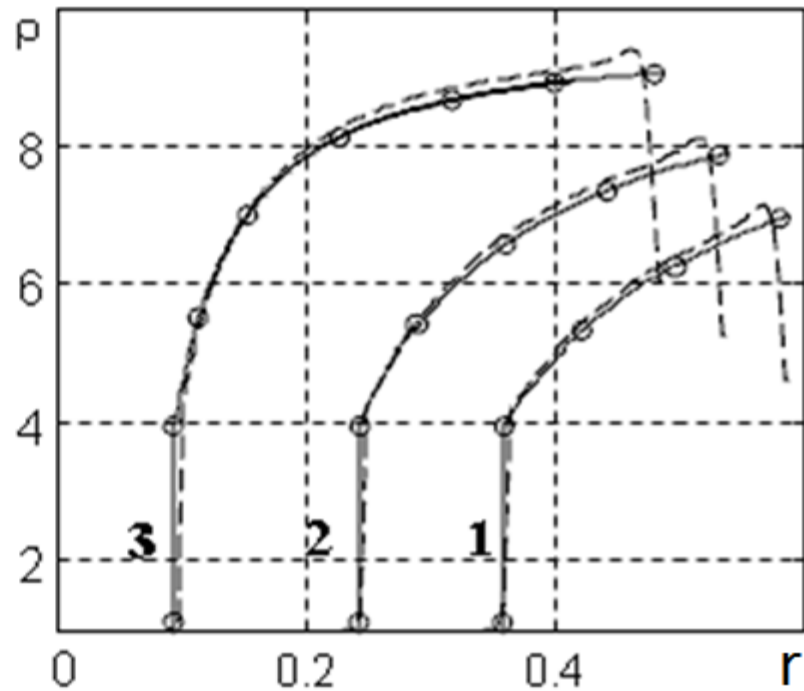
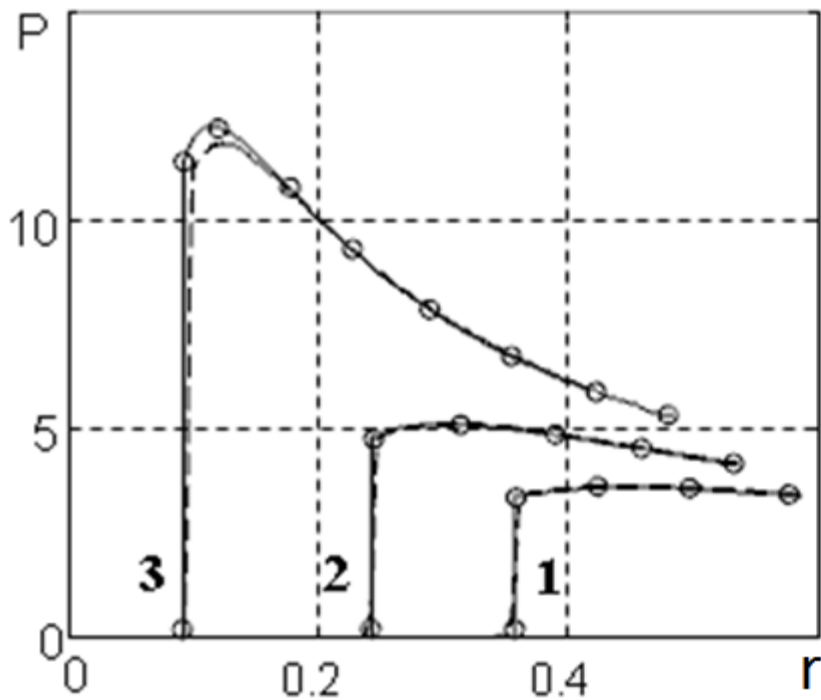


Рис. 6. Зависимости давления, плотности и скорости от эйлеровой координаты r для $\gamma=5/3$, $n=n_*=2,065135$ и трех моментов времени 1 – $t=0,4$; 2 – $t=0,45$; 3 – $t=0,5$.
 Сплошная линия – аналитическое решение данной работы,
 –o– – расчёты по программе ВОЛНА с выделением разрывов,
 - - - - - расчёты по программе ВОЛНА без выделения разрывов.

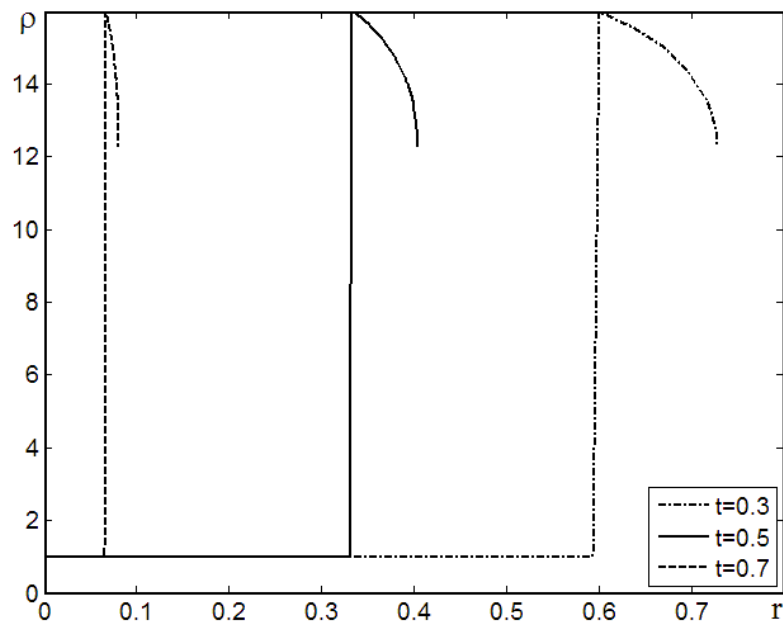
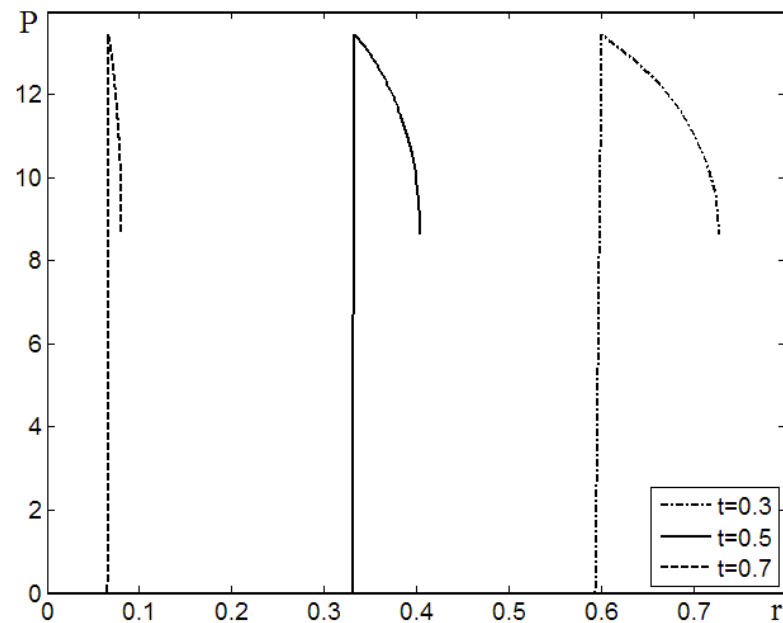
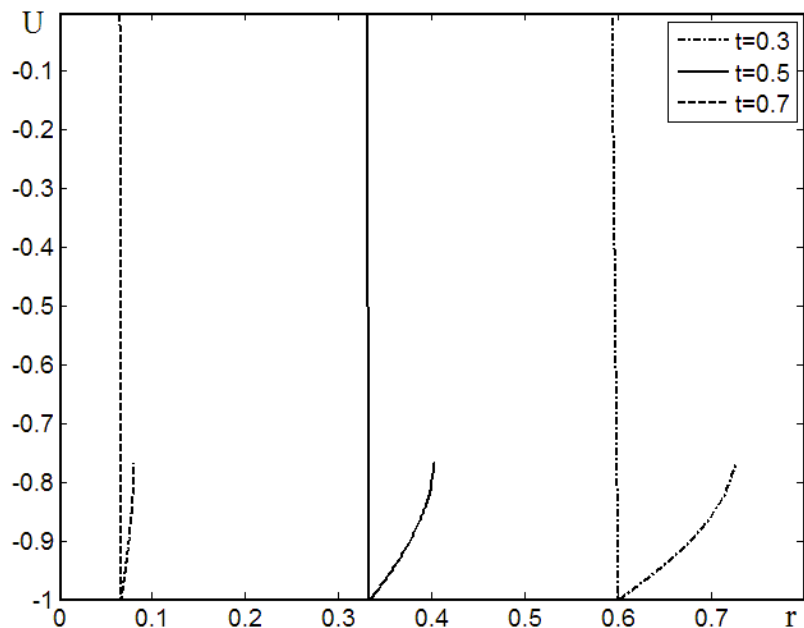


Рис. 7. Зависимости скорости, давления и плотности от эйлеровой координаты r между ударной волной и характеристикой для $\gamma=5/3$, $n=3$ и трех моментов времени $t=0,3; 0,5; 0,7$.

Спасибо за внимание!