УДК 532.529 + 539.3

МОДЕЛИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ВИХРЕВЫХ ДВИЖЕНИЙ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

В. Ф. Куропатенко[1]

[1]*Российский Федеральный ядерный центр – ВНИИ Технической физики имени академика Е.И. Забабахина*

Аннотация: Для каждого компонента смеси на основе связей девиаторов тензоров скоростей деформаций, напряжений и скоростей напряжений строятся модели вязкости, упругости и пластичности компонентов смеси. Упругость обратима, поэтому энергия упругой нагрузки не может переходить в другие виды энергии. Вязкость и пластичность необратимы и работа пластической деформации полностью переходит в тепловую энергию. Учитываются повороты и центробежные силы.

Ключевые слова: ***тензор, скорость деформации, девиатор, вязкость, упругость, пластичность, смесь, компонент, вихрь***

1. Сплошная среда

Модели сплошной среды широко применяются для решения многих научных и технических задач. Основные характеристики сплошной среды ρ - плотность, $\overline{U}$ - скорость и ε- удельная энергия определяются путём перехода от микрочастиц на макроуровень с помощью мгновенных законов сохранения [1] массы, импульса и энергии. Непрерывность характеристик сплошной среды позволяет записать законы сохранения в виде дифференциальных уравнений с частными производными. Кроме основных величин поведение сплошной среды характеризуется рядом других величин, для определения которых нужно строить модели свойств веществ (уравнения состояния, определяющие уравнения, кинетические уравнения химических реакций, фазовых переходов, микродефектов, уравнения Максвелла и др.). Ядром моделей механики сплошной среды (МСС) являются законы сохранения массы, импульса и энергии в форме уравнений Эйлера-Гельмгольца для идеальной среды «рис.1». Все реальные свойства сплошной среды описываются дополнительными уравнениями и дополнительными членами в уравнениях ядра. Из всех реальных физических свойств ограничимся рассмотрением тех, которые определяются тремя видами дисторсии: упругой, пластической и вязкой.

В момент t_0 выберем произвольно точку с координатами t_0, x_0, y_0, z_0 . При $t > t_0$ траектория её движения определяется системой уравнений

$$x = x(t, x_0, y_0, z_0), \quad y = y(t, x_0, y_0, z_0), \quad z = z(t, x_0, y_0, z_0).$$

Рис. 1. Структура моделей МСС

Производные x, y, z по t при постоянных x_0, y_0, z_0 определяют компоненты вектора скорости $\overline{U}$

$$U_x = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0}, \quad U_y = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0}, \quad U_z = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0}.$$

Компоненты скорости $\overline{U}$ зависят от t, x, y, z

$$U_x = U_x(t,x,y,z), \quad U_y = U_y(t,x,y,z), \quad U_z = U_z(t,x,y,z).$$

Запишем эту систему в дифференциалах

$$dU_x = \left(\frac{\partial U_x}{\partial t}\right)_{x,y,z} dt + \left(\frac{\partial U_x}{\partial x}\right)_{t,y,z} dx + \left(\frac{\partial U_x}{\partial y}\right)_{t,x,z} dy + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z}\right)_{t,x,y} dz,$$

$$dU_y = \left(\frac{\partial U_y}{\partial t}\right)_{x,y,z} dt + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x}\right)_{t,y,z} dx + \left(\frac{\partial U_y}{\partial y}\right)_{t,x,z} dy + \left(\frac{\partial U_y}{\partial z}\right)_{t,x,y} dz,$$

$$dU_z = \left(\frac{\partial U_z}{\partial t}\right)_{x,y,z} dt + \left(\frac{\partial U_z}{\partial x}\right)_{t,y,z} dx + \left(\frac{\partial U_z}{\partial y}\right)_{t,x,z} dy + \left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right)_{t,x,y} dz.$$

Производные при dx, dy, dz в каждой точке t, x, y, z образуют тензор скоростей смещений $\dot{T}$

$$\dot{T} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial U_x}{\partial x} & \dfrac{\partial U_x}{\partial y} & \dfrac{\partial U_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial U_y}{\partial x} & \dfrac{\partial U_y}{\partial y} & \dfrac{\partial U_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial U_z}{\partial x} & \dfrac{\partial U_z}{\partial y} & \dfrac{\partial U_z}{\partial z} \end{Vmatrix}$$

Видов смещений всего три: изменение объёма, сдвиги и повороты. Все они определяются тензором скоростей смещений $\dot{T}$, который расщепляется на шаровой тензор скоростей смещений $\dot{T}_{\varepsilon_0}$, девиатор тензора скоростей смещений $\dot{D}_\varepsilon$ и тензор скоростей поворотов $\dot{T}_\omega$.

$$\dot{T}_{\varepsilon_0} = \begin{Vmatrix} \dot{\varepsilon}_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon}_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_{cp} \end{Vmatrix}, \quad \dot{D}_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \dot{e}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yx} & \dot{e}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} & \dot{\gamma}_{zy} & \dot{e}_{zz} \end{Vmatrix}, \quad \dot{T}_\omega = \begin{Vmatrix} 0 & \dot{\omega}_{xy} & \dot{\omega}_{xz} \\ \dot{\omega}_{yx} & 0 & \dot{\omega}_{yz} \\ \dot{\omega}_{zx} & \dot{\omega}_{zy} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Компоненты этих тензоров определяются выражениями

$$\dot{\varepsilon}_{cp} = \frac{1}{3}\nabla\overline{U}, \quad \dot{e}_{jj} = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - \dot{\varepsilon}_{cp}, \quad \dot{\gamma}_{jk} = \dot{\gamma}_{kj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right), \tag{1}$$

$$\dot{\omega}_{jk} = -\dot{\omega}_{kj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right), \tag{2}$$

где j=x, y, z, k=x,y,z , точка над величиной означает дифференцирование по t при постоянных x_0, y_0, z_0 . Шаровой тензор скоростей смещений $\dot{T}_{\varepsilon_0}$ необходим для построения уравнения состояния (УРС) вещества. Девиатор скоростей смещений $\dot{D}_\varepsilon$ необходим для построения уравнений, описывающих вязкость, упругость и пластичность, т.е. реальные свойства вещества.

Напряжение - это характеристика состояния вещества. В общем случае поле напряжений в окрестности точки t, x, y, z, определяется симметричным тензором напряжений T_σ

$$T_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{Vmatrix}.$$

В механике давление P определяется выражением

$$P = -\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right).$$

Разделим тензор T_σ на шаровой тензор T_{σ_0} и девиатор D_σ

$$T_{\sigma_0} = \begin{Vmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{Vmatrix}, \quad D_\sigma = \begin{Vmatrix} S_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & S_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & S_{zz} \end{Vmatrix},$$

где $S_{jj} = \sigma_{jj} + P$. Если девиатор напряжений D_σ=0 , то среда называется идеальной, если $D_\sigma \neq 0$, то неидеальной.

Поле напряжений в окрестности точки t, x, y, z, определяется не только тензором напряжений T_σ , но также и тензором скоростей напряжений $\dot{T}_\sigma$, который расщепляется на шаровый тензор $\dot{T}_{\sigma_0}$ и девиатор $\dot{D}_\sigma$

$$\dot{T}_\sigma = \begin{Vmatrix} \dot{\sigma}_{xx} & \dot{\tau}_{xy} & \dot{\tau}_{xz} \\ \dot{\tau}_{yx} & \dot{\sigma}_{yy} & \dot{\tau}_{yz} \\ \dot{\tau}_{zx} & \dot{\tau}_{zy} & \dot{\sigma}_{zz} \end{Vmatrix}. \quad \dot{T}_{\sigma_0} = \begin{Vmatrix} -\dot{P} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{P} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{P} \end{Vmatrix}, \quad \dot{D}_\sigma = \begin{Vmatrix} \dot{S}_{xx} & \dot{\tau}_{xy} & \dot{\tau}_{xz} \\ \dot{\tau}_{yx} & \dot{S}_{yy} & \dot{\tau}_{yz} \\ \dot{\tau}_{zx} & \dot{\tau}_{zy} & \dot{S}_{zz} \end{Vmatrix},$$

где $\dot{S}_{jj} = \dot{\sigma}_{jj} + \dot{P}$.

Из условий совпадения главных осей девиаторов D_σ и $\dot{D}_\varepsilon$ следует основное уравнение вязкости – зависимость девиатора напряжений от девиатора скоростей деформаций

$$D_\sigma = 2\mu \dot{D}_\varepsilon, \tag{3}$$

где μ - коэффициент вязкости. Компоненты девиаторов D_σ и $\dot{D}_\varepsilon$ связаны уравнениями

$$S_{jj} = 2\mu \dot{e}_{jj}, \quad \tau_{jk} = 2\mu \dot{\gamma}_{jk},$$

где $\dot{e}_{jj}$ и $\dot{\gamma}_{jk}$ определяются уравнениями (1).

Из условий совпадения главных осей девиаторов $\dot{D}_\sigma$ и $\dot{D}_\varepsilon$ следует основное уравнение упругости – зависимость девиатора скоростей напряжений от девиатора скоростей деформаций (закон Гука)

$$\dot{D}_\sigma = 2G\dot{D}_\varepsilon, \tag{4}$$

где G- модуль сдвига. Компоненты девиаторов $\dot{D}_\sigma$ и $\dot{D}_\varepsilon$ связаны уравнениями

$$\dot{S}_{jj} = 2G\dot{e}_{jj}, \quad \dot{\tau}_{jk} = 2G\dot{\gamma}_{jk}.$$

Связь компонентов шаровых тензоров скорости напряжений $\dot{T}_{\sigma_0}$ и скорости деформаций $\dot{T}_{\varepsilon_0}$ определяется уравнением состояния

$$\dot{P} = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \dot{V} + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \dot{T},$$

где V – удельный объём, T – температура. Компоненты девиатора скоростей деформаций, следуя Рейсу, разделим на упругие (с индексом e) и пластические (с индексом p)

$$\dot{e}_{jj} = \dot{e}^e_{jj} + \dot{e}^p_{jj}, \quad \dot{\gamma}_{jk} = \dot{\gamma}^e_{jk} + \dot{\gamma}^p_{jk}.$$

Введём меру пластичности φ - безразмерную величину. Значение $\varphi = 0$ соответствует идеальной упругости, значение φ=1 – идеальной пластичности. При 0<φ<1 свойства упругости и пластичности проявляются одновременно. После введения φ разделим скорость деформаций так

$$\dot{e}^e_{jj} = (1-\varphi)\dot{e}_{jj}, \quad \dot{e}^p_{jj} = \varphi \dot{e}_{jj}, \quad \dot{\gamma}^e_{jk} = (1-\varphi)\dot{\gamma}_{jk}, \quad \dot{\gamma}^p_{jk} = \varphi\dot{\gamma}_{jk}.$$

Т.о. $\dot{S}_{jj}$ и $\dot{\tau}_{jk}$ определяются уравнениями

$$\dot{S}_{jj} = (1-\varphi)2G\dot{e}_{jj}, \quad \dot{\tau}^e_{jk} = (1-\varphi)2G\dot{\gamma}_{jk}. \tag{5}$$

Законы сохранения массы, импульса и энергии неидеальной среды без теплопроводности имеют вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\overline{U} = 0,$$

$$\frac{d\rho\overline{U}}{dt} + \overline{U}(\rho\nabla\overline{U}) + \nabla P - \frac{\partial\overline{S}_x}{\partial x} - \frac{\partial\overline{S}_y}{\partial y} - \frac{\partial\overline{S}_z}{\partial z} = \overline{\Omega},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\left(E + \frac{1}{2}\overline{U}^2\right)\right) + \rho\left(E + \frac{1}{2}\overline{U}^2\right)\nabla\overline{U} + \nabla P\overline{U} - \frac{\partial\overline{S}_x\overline{U}}{\partial x} - \frac{\partial\overline{S}_y\overline{U}}{\partial y} - \frac{\partial\overline{S}_z\overline{U}}{\partial z} = \overline{\Omega}\,\overline{U},$$

где E– удельная внутренняя энергия,

$$\overline{S}_x = S_{xx}\overline{i} + \tau_{xy}\overline{j} + \tau_{xz}\overline{k}, \quad \overline{S}_y = \tau_{yx}\overline{i} + S_{yy}\overline{j} + \tau_{yz}\overline{k}, \quad \overline{S}_z = \tau_{zx}\overline{i} + \tau_{zy}\overline{j} + S_{zz}\overline{k}, \tag{6}$$

$$\overline{U} = U_x\overline{i} + U_y\overline{j} + U_z\overline{k}. \tag{7}$$

Следствиями этих уравнений являются уравнения движения

$$\rho\frac{d\overline{U}}{dt} + \overline{\nabla}P - \frac{\partial\overline{S}_x}{\partial x} - \frac{\partial\overline{S}_y}{\partial y} - \frac{\partial\overline{S}_z}{\partial z} = \overline{\Omega},$$

и уравнение для внутренней энергии E

$$\rho\frac{dE}{dt} - \frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dt} - \overline{S}_x\frac{\partial\overline{U}}{\partial x} - \overline{S}_y\frac{\partial\overline{U}}{\partial y} - \overline{S}_z\frac{\partial\overline{U}}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

В уравнение для внутренней энергии (8) подставим вектора $\overline{S}_x, \overline{S}_y, \overline{S}_z$ (6) и $\overline{U}$ (7). В результате получим

$$\dot{E} + P\dot{V} = V\dot{A}, \tag{9}$$

где

$$\dot{A} = S_{xx}\dot{e}_{xx} + S_{yy}\dot{e}_{yy} + S_{zz}\dot{e}_{zz} + 2(\tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy} + \tau_{xz}\dot{\gamma}_{xz} + \tau_{yz}\dot{\gamma}_{yz}). \tag{10}$$

Поскольку

$$\dot{e}_{jj} = (1-\varphi)\dot{e}_{jj} + \varphi\dot{e}_{jj}, \quad \dot{\gamma}_{jk} = (1-\varphi)\dot{\gamma}_{jk} + \varphi\dot{\gamma}_{jk},$$

то уравнение (9) запишем в виде

$$\dot{E} + P\dot{V} = (1-\varphi)V\dot{A} + \varphi V\dot{A}. \tag{11}$$

При построении уравнения состояния, связывающего шаровые тензора скоростей смещений и напряжений, удельная внутренняя энергия представляется в виде суммы холодной энергии $E_x(v)$ и тепловой энергии $E_T(v,T)$ [5]. В случае идеальной среды, в которой девиаторы $\dot{D}_\sigma$ и $\dot{D}_\epsilon$ равны нулю, холодная энергия обратима. В неидеальной среде удельная внутренняя энергия делится на энергию дилатации и энергию дисторсии [6], которая в свою очередь равна сумме энергий упругой дисторсии E_e и энергии пластической дисторсии E_p . Поскольку пластические деформации необратимы, то E_p без изменений будем включать в E_T . Упругая же дисторсия обратима, поэтому E должно состоять из трёх слагаемых.

$$E = E_x(V) + E_e + E_T(V,T),$$

где E_e - удельная энергия упругой дисторсии. Т.о. уравнение (11) расщепляется на два

$$\dot{E} + P\dot{V} = \varphi V\dot{A}, \tag{12}$$

$$\dot{E}_e = (1-\varphi)V\dot{A}. \tag{13}$$

Величина $\dot{A}$ (10) может быть и положительной и отрицательной. Но скорость диссипации энергии, т.е. правая часть в уравнении (12), не может быть отрицательной. При $\dot{A}<0$ это возможно только при $\varphi = 0$. Т.о. получаем первое ограничение для функции φ

$$\varphi = 0 \quad \text{если} \quad \dot{A} < 0.$$

Рассмотри теперь уравнение (13) для упругой энергии. Компоненты девиатора скоростей напряжений определяются уравнениями (5). Выразив

$\dot{e}_{jj}$ и $\dot{\gamma}_{jk}$ из (5) через $\dot{S}_{jj}$ и $\dot{\tau}_{jk}$, подставив их в (10), а затем в (13) получим уравнение для упругой энергии

$$\dot{E}_e = \frac{V}{4G}\dot{B},$$

где $B = S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + S_{zz}^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$. Введём безразмерную величину

$$\psi = \frac{3B}{2Y},$$

где Y предел текучести Мизеса (1913 г.). Упругие деформации возможны при $\psi < 1$. Введём ещё безразмерную величину

$$R = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \psi > 1, \dot{A} > 0, \\ \psi, & \text{если} \quad \psi \leqslant 1, \dot{A} > 0, \\ 0, & \text{если} \quad \dot{A} \leqslant 0. \end{cases} \tag{14}$$

Меру пластичности φ определим так

$$\varphi = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - R^m} & \text{при} \quad \dot{A} > 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad \dot{A} \leqslant 0, \end{cases} \tag{15}$$

Определенные из уравнений (14), (15) R и φ изменяются в пределах $0 \leqslant R \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$.При R $= 1$, $\varphi = 1$ дисторсия является пластической. Из (5) и (13) следует, что при $\varphi = 1$

$$S_{jj} = const, \quad \tau_{jk} = const, \quad E_e = const.$$

Удельная внутренняя энергия в пластическом течении растёт в соответствии с уравнением (12). При $\varphi = 0$ изменяется только энергия упругой дисторсии в соответствии с уравнением (13). При $0 < \varphi < 1$ одновременно проявляются и упругие и пластические свойства материала.

Подавляющее большинство течений сплошной среды является вихревыми. Ламинарные течения в природе встречаются чрезвычайно редко. Компоненты тензора скоростей поворотов имеют вид (2). Если поворотов нет, то все $\dot{\omega}_{jk} = 0$ и из (2) следуют условия ламинарности (потенциальности) течения

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U_y}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial y} = 0. \tag{16}$$

Если одно из условий (16) нарушено, течение является вихревым. Из теории движений с криволинейными траекториями известно выражение для модуля центробежной силы при вращении вокруг оси 0_z

$$\Omega_z = 2\rho\dot{\varphi}_z U.$$

Направление Ω ортогонально направлению U, т.е $\Omega_x = -2\rho\dot{\varphi}_z U_y, \quad \Omega_y = 2\rho\dot{\varphi}_z U_x$. В общем (трёхмерном) случае в каждой точке действует сила

$$\overline{\Omega} = 2\rho(\overline{U} \times \dot{\overline{\omega}}),$$

компоненты которой имеют вид

$$\Omega_x = 2\rho(\dot{\omega}_{zx} U_z - \dot{\omega}_{yx} U_y), \quad \Omega_y = 2\rho(\dot{\omega}_{yx} U_x - \dot{\omega}_{zy} U_z), \quad \Omega_z = 2\rho(\dot{\omega}_{zy} U_y - \dot{\omega}_{zx} U_x).$$

Центробежная сила в отличие от grad σ_{jk} является объёмной. Таким образом, тензора $\dot{T}_\epsilon$ и $\dot{T}_\sigma$ порождают две цепочки тензоров, связи между которыми являются составными частями моделей МСС

$$\dot{T}_\varepsilon = \dot{T}_{\varepsilon_0} + \dot{D}_\varepsilon + \dot{T}_\omega,$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\dot{T}_\sigma = \dot{T}_{\sigma_0} + \dot{D}_\sigma + \dot{T}_{\sigma\omega}.$$

Связь $\dot{T}_{\sigma_0} = F_1(\dot{T}_{\varepsilon_0})$ - определяется уравнением состояния, связь $\dot{D}_\sigma$ и $\dot{D}_\varepsilon$ (4) – это уравнения упругости, связь $\dot{T}_{\sigma\omega} = F_3(\dot{T}_\omega)$ - это уравнения вихрей.

2. Многокомпонентная смесь

В модели многоскоростных взаимодействующих континуумов [1]-[4], каждый компонент и смесь в целом являются сплошными средами. Законы сохранения для i-го компонента имеют вид [1].

$$\frac{d_i \alpha_i \rho_i}{dt} + \alpha_i \rho_i \nabla \overline{U}_i = 0, \tag{17}$$

$$\frac{d_i \alpha_i \rho_i \overline{U}_i}{dt} + \overline{U}_i(\alpha_i \rho_i \nabla \overline{U}_i) + \nabla \alpha_i P_i + \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\alpha_i \overline{F}_{i\nu} - \alpha_i \overline{S}_{i\nu}) - \alpha_i \overline{R}_i - \alpha_i \overline{\Omega}_i = 0, \tag{18}$$

$$\frac{d_i\alpha_i\rho_i\varepsilon_i}{dt}+\alpha_i\rho_i\varepsilon_i\nabla\overline{U}_i+\nabla\alpha_iP_i\overline{U}_i+\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\alpha_i\left(\overline{F}_{i\nu}-\overline{S}_{i\nu}\right)\overline{U}_i\right)+ \\ +\nabla\alpha_i\overline{Q}_i-\alpha_i\Phi_i-\alpha_i\overline{U}_i(\overline{R}_i+\overline{\Omega}_i)=0. \tag{19}$$

Все величины с индексом i являются характеристиками i-го компонента: α_i- объёмная концентрация, F_i - тензор кластерного взаимодействия, $\overline{Q}_i$ - вектор кластерного взаимодействия,$\overline{R}_i$ - вектор парного взаимодействия, Φ_i - механическое и тепловое парное взаимодействие, $\overline{\Omega}_i$ - центробежная сила, $\dfrac{d_if_i}{dt}=\dfrac{\partial f_i}{\partial t}+(\overline{U}_i\overline{\nabla})f_i$. Поскольку i-ый компонент является сплошной средой в объёме смеси, то для него справедливы приведенные выше рассмотрения тензоров скоростей смещений и скоростей напряжений. Т.о. скорости деформаций (1) и (2) для i-го компонента имеют вид

$$\dot{\varepsilon}_{icp}=\frac{1}{3}\nabla\overline{U}_i,\quad \dot{e}_{ijj}=\frac{\partial U_{ijj}}{\partial x_{jj}}-\dot{\varepsilon}_{icp},$$

$$\dot{\gamma}_{ijk}=\dot{\gamma}_{ikj}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_j}\right),\quad \dot{\omega}_{ijk}=-\dot{\omega}_{ikj}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_k}-\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_j}\right).$$

Физические свойства конкретного вещества в смеси определяются не парциальными, а физическими величинами P_i,ρ_i,E_i,σ_i и т.д. Поэтому в уравнениях (3)-(5) у всех величин появляется индекс i, но сами уравнения не изменяются

$$D_{i\sigma}=2\mu_i\dot{D}_{i\varepsilon},\quad \dot{D}_{i\sigma}=2G_i\dot{D}_{i\varepsilon},$$
$$\dot{S}_{ijj}=(1-\varphi_i)2G_i\dot{e}_{ijj},\quad \dot{\tau}_{ijk}=(1-\varphi_i)2G_i\dot{\gamma}_{ijk}.$$

Из уравнений (17)-(19) следует уравнение движения и уравнение внутренней энергии i-го компонента

$$\alpha_i\rho_i\frac{d_i\overline{U}_i}{dt}+\nabla\alpha_iP_i+\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\alpha_i\overline{F}_{i\nu}-\alpha_i\overline{S}_{i\nu})-\alpha_i\overline{R}_i-\alpha_i\overline{\Omega}_i=0,$$

$$\alpha_i\rho_i\frac{d_iE_i}{dt}-\frac{\alpha_iP_i}{\rho_i}\frac{d_i\rho_i}{dt}-P_i\frac{d_i\alpha_i}{dt}+\sum_{\nu=1}^{3}\alpha_i(\overline{F}_{i\nu}-\overline{S}_{i\nu})\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_\nu}+\nabla\alpha_i\overline{Q}_i-\alpha_i\Phi_i=0.$$

Расщепим это уравнение на два. В одном - оставим только члены, содержащие термодинамические величины, во втором – члены, описывающие кластерное взаимодействие и объёмную концентрацию

$$\rho_i\frac{d_iE_i}{dt}-\frac{P_i}{\rho_i}\frac{d_i\rho_i}{dt}-\overline{S}_{ix}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x}-\overline{S}_{iy}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial y}-\overline{S}_{iz}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial z}-\Phi_i=0. \tag{20}$$

$$P_i \frac{d_i \alpha_i}{dt} + \alpha_i \left(\overline{F}_{ix} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x} + \overline{F}_{iy} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial y} + \overline{F}_{iz} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial z} \right) + \nabla \alpha_i \overline{Q}_i = 0.$$

В свою очередь расщепим (20) на уравнение для упругой энергии

$$\rho_i \frac{dE_{ie}}{dt} = \frac{1}{4G_i} \frac{dB_i}{dt},$$

где $B_i = S_{ixx}^2 + S_{iyy}^2 + S_{izz}^2 + 2(\tau_{ixy}^2 + \tau_{ixz}^2 + \tau_{iyz}^2)$ и на уравнение, содержащее работу пластической дисторсии

$$\rho_i \frac{d_i E_i}{dt} - \frac{P_i}{\rho_i} \frac{d_i \rho_i}{dt} - \varphi_i \frac{d_i A_i}{dt} - \Phi_i = 0,$$

где

$$\frac{d_i}{dt} A_i = S_{ixx} \dot{e}_{ixx} + S_{iyy} \dot{e}_{iyy} + S_{izz} \dot{e}_{izz} + 2(\tau_{ixy} \dot{\gamma}_{ixy} + \tau_{ixz} \dot{\gamma}_{ixz} + \tau_{iyz} \dot{\gamma}_{iyz}).$$

Аналогично сплошной среде определяются ψ_i, R_i, φ_i и центробежная сила

$$\overline{\Omega}_i = 2\rho_i (\overline{U}_i \times \overline{\omega}_i),$$

где

$$\Omega_{ix} = \dot{\omega}_{ixz} U_{iz} - \dot{\omega}_{iyx} U_{iy}, \quad \Omega_{iy} = \dot{\omega}_{iyx} U_{ix} - \dot{\omega}_{izy} U_{iz}, \quad \Omega_{iz} = \dot{\omega}_{izy} U_{iy} - \dot{\omega}_{ixz} U_{ix}.$$

3. Модели и моделирование

Любая модель является приближённой. Об этом чаще всего забывают при интерпретации результатов расчётов. Выдавая поток цифр, ЭВМ отрывает их от модели, как бы экранирует модель от пользователя, у которого не возникает необходимости понимания достоинств и недостатков модели.

Доступность ЭВМ сделала мат. моделирование массовым занятием. В ЭВМ легко ввести любую "новую"модель. Подобрав значения эмпирических параметров, можно даже описать несколько экспериментов, но если не обоснованы преимущества модели, то такую работу трудно назвать научной. "Теория моделирования деформируемых сред у нас и за границей заполнена мутными потоками дилетантской путаницы, которые сбивают с толку многих специалистов и учащихся"[7].

Модели сплошной среды верно служат людям больше 200 лет. Многие модели МСС содержат эмпирические параметры, которые калибруются с помощью экспериментов. К 2014 г. резко возросли возможности математического моделирования. Созрели условия для создания моделей нового поколения с минимальным количеством эмпирических параметров. Создание и применение таких моделей позволит не воспроизводить, а прогнозировать результаты любого физического процесса. Важную роль в достижении этой цели призвана сыграть модель многоскоростной многокомпонентной среды, учитывающая не только взаимодействие компонентов, но и происходящие в них вихревые движения.

Работа поддержана РФФИ. Грант 13-01-00072

Литература

1. Куропатенко В.Ф. Новые модели механики сплошных сред // ИФЖ. – 2011. Т. 84. № 1. - С. 74-92.
2. Рахматулин Х.А. Основы гидродинамики взаимодействующих движений сжимаемых сред // ПММ. - 1956. Т. 20. вып. 27. - С. 184-195.
3. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М. Наука. - 1978.
4. Grenn A.E., Naqhdi P.M. A theory of mixtures // Arch. Rat. Mech. and Anal., - 1967. - Vol. 24. № 4. - P. 243-263 (Рус. перевод: Теория смесей. Механика. - 1968. № 4) .
5. Куропатенко В.Ф. Модели механики сплошных сред. Челябинск. ЧГУ. - 2007. - 302 с.
6. Новацкий В. Теория упругости. Мир. М. - 1975. - 872 с.
7. Седов Л.И. О перспективных направлениях и задачах в механике сплошных сред // ПММ. - 1976. Т. 40. вып. 6. - С. 963-980.

Валентин Фёдорович Куропатенко,
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Российского федерального ядерного центра – Всероссийского научно-исследовательского института технической физики им. академика Е.И. Забабахина, Снежинск.
e-mail: *v.f.kuropatenko@rambler.ru*

MODELS OF POTENTIAL AND EDDY MULTICOMPONENT FLOWS

V. F. Kuropatenko[1]

[1]*Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All- Russian Research Institute of Applied Physics*

Abstract: Viscosity, elasticity and plasticity models are derived for each mixture components from relations between strain-rate, stress and stress-rate deviators. Elasticity is reversible, and elastic energy cannot transform into other energies. Viscosity and plasticityare irreversible, and the work of plastic deformation completely transforms into thermal energy. Rotations and centrifugal forces are considered.

Key words: ***tensor, strain rate, deviator, viscosity, elasticity, plasticity, mixture, component, eddy***

References

1. V.F. Kuropatenko, New continuum mechanics models. Eng. Phys. J., – 2011. – Vol. 84, – No.1. – P.74-92.
2. K.A. Rakhmatulin, Hydrodynamics of interacting compressible flows. J. PMM. – 1956. – Vol. 20, Is. 27, – P. 184-195.
3. R.I. Nigmatulin, Heterogeneous media mechanics. Moscow, NAUKA Publishers. 1978.
4. Grenn, A.E., and Naqhdi, P.M., A theory of mixtures. Arch. Rat. Mech. and Anal., 1967. Vol. 24, No. 4. P. 243-263 (Russian translation: A theory of mixtures: Mechanics, 1968, No. 4).
5. V.F. Kuropatenko, Continuum mechanics models. Chelyabinsk, Chelyabinsk State University. 2007. 302 p.
6. V. Novatsky, Elasticity theory. Moscow, MIR Publishers. 1975. 872 p.
7. L.I. Sedov, Prospects in continuum mechanics areas and problems. J. PMM, 1976. Vol. 40, Is. 6. P. 963-980.

KuropatenkoValentin Fyodorovich ,
doctoral thesis in physics and mathematics, professor, principal investigator at the Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Applied Physics, Snezhinsk .
e-mail:*v.f.kuropatenko@rambler.ru*