

УДК 533.6.011.1

ДИНАМИЧЕСКОЕ СЖАТИЕ ХОЛОДНОГО ГАЗОВОГО ШАРА

© 2015 г. В. Ф. Куропатенко, Е. С. Шестаковская, М. Н. Якимова

Представлено академиком РАН В.А. Левиным 30.09.2014 г.

Поступило 15.10.214 г.

DOI: 10.7868/S0869565215110080

Более полувека не прекращаются попытки построения аналитических решений с целью создания условий для кумуляции энергии. Практически всегда решения строились для бесконечной области. Технические же устройства всегда имеют конечные размеры. В отличие от [1–5] рассмотрим динамическое сжатие газового шара конечного размера в следующей постановке. В момент t_0 в сферической области радиуса r_0 находится холодный идеальный газ с параметрами $\rho_0 = \text{const}$, $P_0 = 0$, $u_0 = 0$ (ρ – плотность, P – давление, u – скорость). В точке $t = t_0$, $r = r_0$ задана скорость границы $u_{10} < 0$. При $t > t_0$ из этой точки в газ со скоростью $D_1 < 0$ станет распространяться ударная волна (УВ), на фронте которой

$$\rho_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0, \quad u_1 = \frac{2}{\gamma+1}D_1, \quad P_1 = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0 D_1^2. \quad (1)$$

Течение газа между УВ и границей шара (ГШ) определяется уравнениями

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\rho u}{r} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial r} + \gamma P \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) = 0. \quad (3)$$

Перейдем к новым переменным t , $\xi(r, t)$ и будем искать решение системы уравнений (2), (3) в виде

$$P = \alpha_p(t) \Pi(\xi), \quad \rho = \alpha_\rho(t) \delta(\xi), \quad (4)$$

$$u = \alpha_u(t) M(\xi).$$

Из соображения размерностей будем считать, что $\alpha_p = \alpha_\rho \alpha_u^2$. Производные по t обозначим точкой сверху величины, производные по ξ – штрихом.

*Российский федеральный ядерный центр Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. Е.И. Забабахина,
Снежинск Челябинской обл.
E-mail: V.F.Kuropatenko@rambler.ru*

После перехода к новым переменным уравнения (2), (3) принимают вид

$$\varphi_1 \delta + \omega \xi \delta' + M \delta' + \delta M' + \frac{2M\delta}{\xi} = 0, \quad (5)$$

$$\varphi_2 \delta M + \omega \delta \xi M' + \delta M M' + \Pi' = 0,$$

$$\varphi_3 \Pi + \omega \xi \Pi' + M \Pi' + \gamma \Pi M' + \frac{2\gamma M \Pi}{\xi} = 0, \quad (6)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{\dot{\alpha}_p}{\alpha_p \beta}, \quad \varphi_2 = \frac{\dot{\alpha}_u}{\alpha_u \beta}, \quad \varphi_3 = \frac{\dot{\alpha}_p}{\alpha_p \beta}, \quad (7)$$

$$\omega = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{\xi \beta}, \quad \beta = \alpha_u \frac{\partial \xi}{\partial r}.$$

Разделим уравнения (5), (6) на две системы, одна из которых содержит величины, зависящие от t , а вторая – от ξ . Для этого нужно, чтобы

$$\varphi_1(t) = \text{const}, \quad \varphi_2(t) = \text{const}, \quad (8)$$

$$\varphi_3(t) = \text{const}, \quad \omega(t) = \text{const}.$$

Условия (8) выполняются, если функция $\xi(t, r)$ линейно зависит от r :

$$\xi = r f(t). \quad (9)$$

Если задать траекторию УВ $r_1 = r_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n$, где t_f – момент фокусировки УВ, и положить на УВ $\xi_1 = 1$, то из (9) получим выражения для $f(t)$ и $\xi(r, t)$:

$$f(t) = \frac{1}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n, \quad \xi = \frac{r}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n. \quad (10)$$

Продифференцировав $r_1(t)$ по t , получим скорость УВ

$$D_1 = - \frac{r_0 n}{t_f - t_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}. \quad (11)$$

Таблица 1

№	t	U	№	t	U	№	t	U
1	0.04	-1.008792	11	0.24	-1.042656	21	0.34	-1.042843
2	0.07	-1.015162	12	0.25	-1.043463	22	0.35	-1.041620
3	0.10	-1.021257	13	0.26	-1.044130	23	0.36	-1.040097
4	0.13	-1.026982	14	0.27	-1.044643	24	0.37	-1.038252
5	0.16	-1.032224	15	0.28	-1.044992	25	0.38	-1.036058
6	0.18	-1.035381	16	0.29	-1.045165	26	0.39	-1.033458
7	0.20	-1.038211	17	0.30	-1.045146	27	0.40	-1.030514
8	0.21	-1.039486	18	0.31	-1.044921	28	0.42	-1.023220
9	0.22	-1.040657	19	0.32	-1.044474	29	0.45	-1.008354
10	0.23	-1.041717	20	0.33	-1.043787	30	0.50	-0.9699473

Из (1), (4) и (11) следуют два уравнения на фронте УВ где

$$u_1 = -\frac{2}{\gamma + 1} \frac{r_0 n}{t_f - t_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}, \quad (12)$$

$$\alpha_u(t) M_1 = -\frac{2}{\gamma + 1} \frac{r_0 n}{t_f - t_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}.$$

Потребовав, чтобы $M_1 = \text{const}$ не зависело от r_0 , t_0 , t_f и n , получим

$$M_1 = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \alpha_u(t) = -\frac{r_0 n}{t_f - t_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}. \quad (13)$$

При $t = t_0$ из (12) определяется зависимость t_f от n :

$$t_f = t_0 - \frac{2r_0 n}{(\gamma + 1)u_{10}}.$$

Значения δ_1 , Π_1 и зависимости $\alpha_p(t)$, $\alpha_u(t)$ получаются по аналогии с M_1 и $\alpha_u(t)$:

$$\delta_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad \alpha_p = \rho_0, \quad (14)$$

$$\Pi_1 = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \alpha_p = \rho_0 D_{10}^2 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{2(n-1)}.$$

Из (7), (13) и (14) определяются

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{n-1}{n}, \quad \varphi_3 = \frac{2(n-1)}{n}, \quad \omega = -1.$$

Подставим $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \omega$ в уравнения (5), (6) и преобразуем их к виду

$$M' = \frac{R_1 - 2\gamma n M \Pi}{R_2}, \quad \delta' = \frac{\delta(2M\delta n(M - \xi)^2 - R_1)}{R_2(M - \xi)}, \quad (15)$$

$$\Pi' = \frac{\delta \Pi}{R_2} (2(n\gamma M + \xi(n-1))(M - \xi) - (n-1)\gamma \xi M), \quad (16)$$

$$R_1 = (n-1)\xi((M - \xi)\delta M - 2\Pi),$$

$$R_2 = n\xi(\gamma\Pi - (M - \xi)^2\delta).$$

Функции $\delta(\xi)$, $\Pi(\xi)$, $M(\xi)$ находятся путем интегрирования уравнений (15), (16) в области $1 \leq \xi < \infty$. Значение $\xi = \infty$ достигается при $t = t_f$ и $r > 0$. Величина n находится в процессе интегрирования уравнений (15), (16) из условия одновременного обращения в ноль числителей в уравнениях (15), (16) и знаменателя R_2 . Здесь приведены полученные таким методом значения $n(\gamma)$:

γ	1.1	1.2	4/3	1.4	5/3
v	0.795973	0.757142	0.729259	0.717175	0.688377
δ_∞	184.465	59.5525	26.5447	20.0714	9.549680

Плотность газа в момент фокусировки не зависит от радиуса и определяется соотношением $\rho = \rho_0 \delta_\infty$. Здесь также приведены значения δ_∞ для разных γ .

Изложенное решение было применено для оценки точности нескольких методов расчета ударных волн. Холодный газовый шар размером $r_0 = 1$ имел параметры $P_0 = 0$, $\rho_0 = 1$, $U_0 = 0$, $U_{01} = -1$, $\gamma = 5/3$. Граничное условие определяли следующим образом. Масса шара не зависит от времени. В момент t_* она равна сумме m_1 и массы газа между УВ и границей

$$\frac{4}{3}\pi\rho_0 r_1^3 + \int_n^{r_*} 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r_0^3. \quad (17)$$

Перейдем к интегрированию по ξ . При $t = t_*$ из (10) следует зависимость

$$r = r_0 \xi \left(\frac{t_f - t_*}{t_f - t_0} \right)^n. \quad (18)$$

Подставив (18) в (17), получим уравнение для определения координаты границы ξ_*

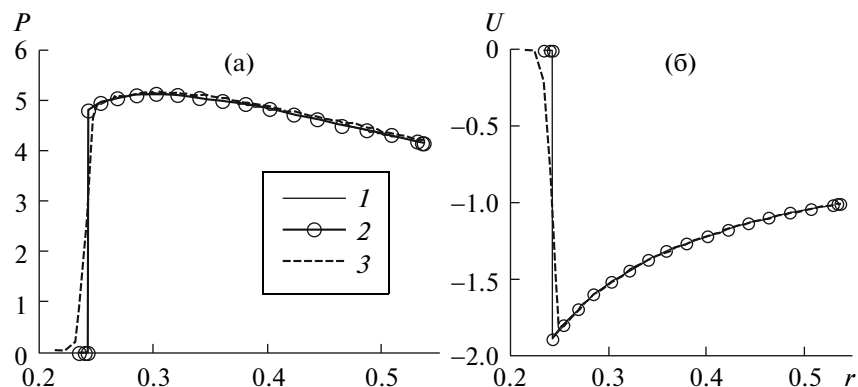


Рис. 1.

$$1 + 3 \int_1^{\xi_*} \delta \xi^2 d\xi - \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t_*} \right)^{3n} = 0.$$

По значению ξ_* из зависимостей $M(\xi)$, $\Pi(\xi)$ определяются M_* , Π_* , а из (4) определяются U и P на границе шара. Радиус границы находим из (18) по ξ_* . Зависимость скорости границы от времени для $\gamma = 5/3$ представлена в табл. 1.

На рис. 1 приведены зависимости $P(r)$ (а) и $U(r)$ (б) на момент времени $t_* = 0.45$; 1 – аналитическое решение данной работы, 2, 3 – расчеты по методу [6] на равномерной по r сетке с числом точек $N = 100$ (2 – с выделением фронта УВ, 3 – без выделения фронта УВ).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 13–01–00072.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л.И. // ДАН. 1945. Т. 47. № 2. С. 94–96.
2. Станюкович К.П. // ДАН. 1945. Т. 48. № 5. С. 331–333.
3. Крайко А.Н. Сферически и цилиндрически симметричное нестационарное сжатие идеального газа. Докл. на VII Забабахинских научных чтениях. Снежинск. 2003. www.vniitf.ru/rig/konfex/7zst/reports/6-1.pdf. 13 p.
4. Брушлинский К.В., Каждан Я.М. // УМН. 1963. Т. 18. В. 2. С. 3–23.
5. Guderley G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nahe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse // Luftfahrtforschung. 1942. Bd. 19. Lfg. 9. S. 302–312.
6. Куропатенко В.Ф., Кузнецова В.И., Михайлова Г.И. и др. // Вопр. атом. науки и техники. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. 1989. В. 2. С. 9–26.