XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20–24 августа 2015 года. С. 2209–2211.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ КОМПОНЕНТОВ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ МНОГОФАЗНОЙ СРЕДЫ

В.Ф. Куропатенко

Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский НИИ технической физики им. Е.И. Забабахина, г. Снежинск

v.f.kuropatenko@rambler.ru

Аннотация. Каждый компонент смеси характеризуется физическими величинами (плотность, скорость, давление и др.), а его физические свойства определяются уравнением состояния и определяющими уравнениями (упругость, пластичность, вязкость). Законы сохранения каждого компонента а форме дифференциальных уравнений в частных производных пишутся не для физических, а для парциальных характеристик. Полученная система уравнений интегрируется в области смеси. А чтобы перейти от парциальных плотности и энергии к физическим, которые нужны, чтобы воспользоваться уравнением состояния, следует добавить уравнение, описывающее изменение объёмной концентрации компоненты. В работе рассмотрены определяющие уравнения и уравнения состояния компонента смеси, основанные на предположении, что каждый компонент является непрерывной сплошной средой.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В природе нет сплошных сред. Любой объём заполнен микрочастицами, каждая из которых имеет массу, скорость и энергию. Сплошная среда, это всего лишь модель реальной среды. Переход от микрочастиц к сплошной среде совершается с помощью мгновенных законов сохранения. Если в объёме находятся частицы одного вещества, то при таком переходе получается однородная сплошная среда. Если же в объёме находятся частицы разных веществ, то для каждого вещества после перехода получается сплошная среда – компонент, а для всех частиц – сплошная среда – смесь. Переход к сплошной среде с помощью законов сохранения определяет плотность, скорость и удельную полную энергию, а значит, и удельную внутреннюю энергию. Достоинство сплошной среды – непрерывность всех её характеристик в пространстве t_1, x_1, x_2, x_3. Непрерывность характеристик позволяет определить частные производные и записать законы сохранения в дифференциальной форме. Без химических реакций и теплопроводности они имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_\nu\rho_\nu)+\nabla\left(\alpha_\nu\rho_\nu\overline{U}_\nu\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_\nu\rho_\nu\overline{U}_\nu\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\alpha_\nu\left(\rho_\nu\overline{U}_\nu U_{\nu k}+\overline{F}_{\nu k}-\overline{S}_{\nu k}\right)\right)+\nabla\alpha_\nu P_\nu-\alpha_\nu\overline{\Phi}_\nu=\alpha_\nu\overline{R}_\nu,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_\nu\rho_\nu\varepsilon_\nu)+\nabla\left(\alpha_\nu\overline{U}_\nu(P_\nu+\rho_\nu\varepsilon_\nu)+\alpha_\nu\overline{Q}_\nu\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\alpha_\nu\overline{U}_\nu\left(\overline{F}_{\nu k}-\overline{S}_{\nu k}\right)\right)-\alpha_\nu\overline{\Phi}_\nu\overline{U}_\nu=\alpha_\nu(W_\nu+A_\nu),$$

где $\rho_\nu, P_\nu, \varepsilon_\nu, \overline{U}_\nu$ – плотность, давление, удельная полная энергия и $\overline{U}_\nu$ – скорость ν-го компонента, α_ν – объёмная концентрация, $\overline{\Phi}_\nu$ – центробежная сила, $\overline{S}_{\nu k}$ – составляющие девиатора тензора напряжений ν-го компонента. В уравнения законов сохранения входят функции $\overline{F}_{\nu k}$ и $\overline{Q}_\nu$, определяющие кластерное взаимодействие компонентов

$$\overline{F}_{\nu k}=-0{,}5\alpha_\nu\rho_\nu\left(\overline{U}-\overline{U}_\nu\right)(U_k-U_{\nu k}),\qquad \overline{Q}_\nu=0{,}5\alpha_\nu\left(\overline{U}-\overline{U}_\nu\right)(P_\nu+\rho_\nu E_\nu).$$

Включение этих функций в законы сохранения ν-го компонента является необходимым условием получения законов сохранения смеси путём суммирования законов сохранения компонентов [1]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\rho\overline{U}=0,\qquad \frac{\partial\rho\overline{U}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\overline{U}U_k-\overline{F}_k\right)+\nabla P-\overline{\Phi}=0,$$

$$\frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t}+\nabla\left(\overline{Q}+\overline{U}(P+\rho\varepsilon)\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{U}\overline{F}_k\right)=0.$$

Функции $\overline{F}_{\nu k}, \overline{F}_k$ и $\overline{Q}_\nu, \overline{Q}$ связаны соотношениями

$$\overline{F}_k=-\sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu\overline{F}_{k\nu},\qquad \overline{Q}=-\sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu\overline{Q}_\nu.$$

Они аналогично законам сохранения не содержат индивидуальных характеристик взаимодействующих компонентов. По этой причине они и включены в законы сохранения. Центробежные силы определяются уравнениями

$$\Phi_{\nu1}=\rho_\nu\left(\dot{\omega}_{\nu31}U_{\nu3}-\dot{\omega}_{\nu21}U_{\nu2}\right),\qquad \Phi_{\nu2}=\rho_\nu\left(\dot{\omega}_{\nu21}U_{\nu1}-\dot{\omega}_{\nu32}U_{\nu1}\right),\qquad \Phi_{\nu3}=\rho_\nu\left(\dot{\omega}_{\nu32}U_{\nu2}-\dot{\omega}_{\nu31}U_{\nu1}\right),$$

где $\Phi_{\nu k}$ – компоненты вихря скорости. Одним из уравнений, замыкающих систему законов сохранения, является уравнение для объёмной концентрации

$$\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial t} + \overline{U} \nabla \alpha_\nu + \frac{\alpha_\nu}{\rho C^2} W_\nu = 0.$$

ПАРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОМПОНЕНТОВ

Этот вид взаимодействия компонентов рассмотрен в [2, 3]. Функция $\overline{R}_\nu$ определяет обмен количеством движения ν-го компонента с остальными компонентами смеси. Она имеет вид

$$\overline{R}_\nu = \sum_{\mu=1}^{N} \alpha_\mu \alpha_{\nu\mu} \left(\overline{U}_\mu - \overline{U}_\nu \right).$$

Функция W_ν определяет обмен механической энергией, а A_ν – обмен кинетической энергией. Они имеют вид

$$A_\nu = 0{,}5 \sum_{\mu=1}^{N} \alpha_\mu a_{\nu\mu} \left(U_\mu^2 - U_\nu^2 \right), \qquad W_\nu = \sum_{\mu=1}^{N} \alpha_\mu \left(b_{\nu\mu} \left(P_\mu - P_\nu \right) - c_{\nu\mu} \left(T_\mu - T_\nu \right) \right).$$

Функции $a_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu}$ зависят от индивидуальных характеристик взаимодействующих компонентов, в том числе и от характера смеси (гомогенная, гетерогенная), и от типа смеси (эмульсии, суспензии или др.). Приведённые выше законы сохранения записаны для парциальных величин, которые определяются одинаково и для гомогенных, и для гетерогенных смесей. Характеристики парного взаимодействия $\overline{R}_\nu, A_\nu, W_\nu$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu \overline{R}_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu A_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu W_\nu = 0.$$

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Общий подход к построению уравнений состояния и определяющих уравнений непосредственно следует из модели сплошной среды. Из дифференциалов компонент скорости

$$dU_i = \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)_{xk} dt = \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)_t dx_k$$

следует тензор скоростей смещений

$$\dot{T} = \left\| \left(\frac{\partial U_i}{\partial U_k} \right)_t \right\|,$$

$(i = 1,2,3, \;\; k = 1,2,3)$ который расщепляется на тензор скоростей деформаций $\dot{T}_{\varepsilon 0}$, девиатор тензора скоростей деформаций $\dot{D}_\varepsilon$ и тензор скоростей поворотов $\dot{T}_\omega$. Точка над величиной означает производную по времени вдоль траектории частицы. В каждой точке сплошной среды тензор напряжений T_σ делится на шаровый тензор $T_{\sigma 0}$ и девиатор D_σ. Если девиатор напряжений равен нулю, то среда называется идеальной. Из предположения, что главные оси девиаторов напряжений и скоростей деформаций совпадают следует основное уравнение вязкости

$$D_\sigma = 2\mu \dot{D}_\varepsilon,$$

где μ – коэффициент вязкости, а компоненты девиаторов D_σ и $\dot{D}_\varepsilon$ связаны уравнениями

$$S_{ii} = 2\mu \dot{e}_{ii}, \quad \tau_{ik} = 2\mu \dot{\gamma}_{ik}, \qquad \dot{e}_{ii} = \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \nabla \overline{U} \right), \quad \dot{\gamma}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right).$$

Совершенно аналогично тензор скоростей напряжений $\dot{T}_\sigma$ делится на шаровой тензор $\dot{T}_{\sigma 0}$ и девиатор $\dot{D}_\sigma$. Из предположения о совпадении главных осей девиаторов $\dot{D}_\sigma$ и $\dot{D}_\varepsilon$ следует основное уравнение упругости

$$\dot{D}_\sigma = 2G \dot{D}_\varepsilon,$$

где $\dot{S}_{ii} = 2G \dot{e}_{ii}, \quad \dot{\tau}_{ik} = 2G \dot{\gamma}_{ik}, \quad G$ – модуль сдвига.

Связь компонентов шаровых тензоров $\dot{T}_{\sigma 0}$ и $\dot{T}_\varepsilon$ образует уравнение состояния $P = P(V, E)$. В теории уравнений состояния давление и внутренняя энергия имеют вид

$$P = P_x(V) + P_T(V, T), \qquad E = E_x(V) + E_T(V, T),$$

где P_T, E_T тепловые, а $P_x(V)$ и $E_x(V)$ – холодные или упругие составляющие P и E. Иными словами, $E_x(V)$ есть упругая энергия дилатации.

Компоненты девиатора скоростей деформаций делятся на упругие (обратимые) и пластические (необратимые) с помощью меры пластичности φ

$$\dot{e}_{ii}^{e} = (1-\varphi)\dot{e}_{ii},\ \dot{e}_{ii}^{p} = \varphi\dot{e}_{ii},\ \ \dot{\gamma}_{ik}^{e} = (1-\varphi)\dot{\gamma}_{ik},\ \ \dot{\gamma}_{ik}^{p} = \varphi\dot{\gamma}_{ik}.$$

Т.о. компоненты тензора $\dot{D}_\sigma$ изменяются только при упругой и при упругопластической деформации

$$\dot{S}_{ii} = (1-\varphi)2G\dot{e}_{ii},\ \ \ \dot{\tau}_{ik} = (1-\varphi)2G\dot{\gamma}_{ik}.$$

В области пластической деформации при $\varphi = 1$ $\dot{S}_{ii} = 0,\ \dot{\tau}_{ik} = 0,\ S_{ii} = const,\ \tau_{ik} = const,$ хотя $\dot{e}_{ii} \neq 0,\ \dot{\gamma}_{ik} \neq 0$.

Уравнение для внутренней энергии также расщепляется. В дополнение к $E_x(V)$ вводится удельная внутренняя энергия упругих деформаций E_e, определяемая компонентами тензоров $\dot{D}_\sigma$ и $\dot{D}_\varepsilon$ и имеющая вид $\dot{E}_e = (1-\varphi)V\dot{A},$ где

$$\dot{A} = \sum_{i=1}^{3} S_{ii}\dot{e}_{ii} + 2(\tau_{12}\dot{\gamma}_{12} + \tau_{13}\dot{\gamma}_{13} + \tau_{23}\dot{\gamma}_{23}).$$

Поскольку пластические деформации необратимы, то основное уравнение для E имеет вид

$$\dot{E}_T + P_T\dot{V} = \varphi V\dot{A},$$

где $\varphi V\dot{A} = T\dot{S}$. В области упругих деформаций, где $\varphi = 0$, энтропия постоянна. Область упругих деформаций ограничена пределом текучести Y Мизеса. Мера пластичности φ определяется уравнением

$$\varphi = \begin{cases} 1-\sqrt{1-R^m} & \text{при } \dot{A} \geq 0, \\ 0 & \text{при } \dot{A} < 0, \end{cases}$$

где

$$R = \frac{3}{2Y}\left(\sum_{i=1}^{3} S_{ii}^2 + 2\left(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2\right)\right) \leq 1.$$

Тензор поворотов порождает центробежные силы.

Определяющие уравнения построены на основе только сплошной среды и являются общими для любой сплошной среды. В твёрдых телах $G \neq 0$ и $\mu \neq 0$. При нагревании твёрдого тела возрастает упругая энергия дилатации $E_x(V)$ и упругая энергия дисторсии E_e. При плавлении эта упругая энергия переходит в тепловую энергию жидкости. В жидкости остаётся только упругая энергия дилатации.

Приведённые выше уравнения описывают поведение компонента смеси, если он в процессе воздействия других компонентов сжимается, плавится или испаряется.

Законы сохранения компонента смеси и самой смеси, подробно рассмотрены в [1]. Приведенные выше определяющие уравнения вместе с уравнением состояния замыкают систему этих уравнений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00072.

Литература

1. Куропатенко В.Ф. // Инж. физич. журнал. 2011. Т. 84 (1).С. 74-92.
2. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
3. Струминский В.В. // ПММ. 1974. Т. 38 (2). С. 203-210.