

УДК 533.6.011.72

В.Ф. КУРОПАТЕНКО

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ СХОДЯЩИХСЯ УДАРНЫХ ВОЛН¹

Проведён анализ нескольких аналитических решений для сходящихся ударных волн в холодном газе. Показано, что ни одно из них без существенных дополнительных исследований не может быть использовано в качестве эталонного решения для контроля точности численных методов расчёта ударных волн. Построено новое аналитическое решение, использованное в данной работе как эталонное решение. Приведены результаты расчётов по двум различным численным методам в сравнении с эталоном.

Ключевые слова: ударная волна, автомодельность, аналитическое решение, давление, скорость, энтропия.

Введение

До середины прошлого столетия в условиях отсутствия вычислительной техники задачи механики сплошной среды решались в упрощённых постановках (линейные приближения, упрощённые уравнения состояния и т.д.). Получаемые при этом аналитические решения позволяли удовлетворять потребности техники. Но потребности техники росли. В середине прошлого века начались работы по созданию ядерного оружия. Конструкции первых ядерных устройств были сферически-симметричными. Возникла острая потребность в оценке сферически-симметричных ударных волн (УВ) и параметров течения вещества за ними. Первой работой в этой области была работа Г. Гудерлея [1], который в 1942 г. построил аналитическое решение для сходящейся УВ в идеальном газе

$$P = f(S)\rho^\gamma \quad (1)$$

с $\gamma = 1.4$. Аналитическое решение задачи о сходящейся сферической УВ в идеальном газе было рассмотрено в 1944 г. [2, 3]. Анализ состояния проблемы изложен в [4]. В течение последних десятилетий интерес к сходящимся УВ повысился в связи с проблемой лазерного термояда. Новые результаты были опубликованы в [5–7]. Однако в этих исследованиях центр тяжести проблемы сместился в область безударного сжатия газа. В данной работе аналитические решения рассмотрены с точки зрения их готовности для использования в качестве эталонных решений для контроля точности численных методов расчёта ударных волн и дано новое решение задачи.

Ударная волна

В случае сферической симметрии сходящаяся к центру УВ – это сферическая поверхность, движение которой определяется зависимостью $r_w(t)$. Продифференцировав r_w , получим скорость УВ D . В случае распространения УВ по холодному покоящемуся идеальному газу с параметрами $P_0 = 0$, $\rho_0 = \text{const}$, $U_0 = 0$ из условий на поверхности сильного разрыва следует

$$\rho_w = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0, \quad U_w = \frac{2}{\gamma+1}D, \quad P_w = \rho_0 D U_w. \quad (2)$$

Для простоты будем обозначать энтропийную функцию $f(S)$, входящую в уравнение состояния (1), через S . Из (1) и (2) следует зависимость S от D

$$S = \frac{2}{\gamma+1} \rho_0^{1-\gamma} D^2 \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^\gamma. \quad (3)$$

Энтропия сохраняется вдоль траектории каждой частицы вещества, прошедшей через фронт ударной волны. Положение частицы меняется со временем, однако её массовая координата m остается неизменной:

¹ Работа выполнена в рамках Программы повышения конкурентоспособности ТГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

$$m_w = \frac{4}{3} \pi \rho_0 r_w^3. \quad (4)$$

Поскольку D зависит от r_w , то из (3) и (4) следует зависимость $S(m)$ в газе за ударной волной, справедливая в любой момент времени, включая и момент фокусировки.

Движение газа за ударной волной

На фронте УВ газ приобретает скорость $U_w < 0$ и в течение некоторого промежутка времени каждая частица движется к центру симметрии. При этом давление и плотность возрастают, но энтропия остаётся постоянной. Параметры течения газа определяются законом сохранения массы, уравнением движения и уравнением, следующим из определения скорости звука:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2\rho U}{r} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial r} + \gamma P \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2U}{r} \right) = 0. \quad (6)$$

В работах [1–7] не обсуждается вопрос о причинах возникновения ударной волны и отсутствует строгая постановка краевой задачи. Например, в [3] говорится, что течение рассматривается в настолько узкой области, что «характер движения в значительной степени не зависит от конкретных начальных условий», т.е. от конкретных причин движения. Тем не менее при построении аналитических решений о движении газа возникает необходимость определить параметры течения в некоторых точках. Разные авторы делают это по-разному.

Аналитическое решение К.П. Станюковича и Л.Д. Ландау [2, 3]

По аналогии с [1] авторы предполагают, что течение газа является автомодельным и зависит от переменной

$$\xi = r / A(-t)^\alpha, \quad (7)$$

где $A = \text{const}$. На ударной волне $\xi = 1$, тогда из (7) следует уравнение траектории УВ

$$r_w = A(-t)^\alpha. \quad (8)$$

Продифференцировав r_w по t , получим скорость УВ

$$D = -A\alpha(-t)^{\alpha-1}. \quad (9)$$

Из условий, что в момент фокусировки при $t = 0$ $r_w = 0$ и $D = -\infty$, следуют ограничения на α : $0 < \alpha < 1$. Из уравнений (2), (8) и (9) получаются зависимости $U_w(t, r_w)$, и $P_w(t, r_w)$:

$$U_w = -\frac{2}{\gamma+1} \frac{\alpha r_w}{t}, \quad P_w = \frac{2}{\gamma+1} \rho_0 \frac{\alpha^2 r_w^2}{t^2}. \quad (10)$$

После подстановки P_w и ρ_w из (2) и (10) выражение для квадрата скорости звука принимает вид

$$C_w^2 = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{\alpha^2 r^2}{t^2}. \quad (11)$$

Безразмерные функции $M(\xi)$ – скорость, $\delta(\xi)$ – плотность и $Z(\xi)$ – безразмерный аналог квадрата скорости звука вводятся, как и в [1], уравнениями

$$U = \frac{\alpha r}{t} M(\xi), \quad \rho = \rho_0 \delta(\xi), \quad C^2 = \frac{\alpha^2 r^2}{t^2} Z(\xi). \quad (12)$$

Из (10) – (12) следует, что на фронте УВ при $\xi = 1$ безразмерные величины M, δ и Z принимают следующие значения:

$$\delta_w = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad M_w = \frac{2}{\gamma+1}, \quad Z_w = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}.$$

В момент фокусировки сходящейся УВ величины $P_w = \infty$, $U_w = -\infty$ становятся величинами перед фронтом отражённой УВ, за фронтом которой $U_w = 0$, $P_w = \infty$. Кроме того, отражённая УВ при $t > 0$ распространяется по переменному фону. В такой ситуации задача о распаде произвольного разрыва не имеет решения и ничего конкретного об отражённой УВ сказать нельзя. Поэтому утверждение авторов [3] «Движение в этой стадии тоже автомодельно с тем же показателем автомодельности α », как и предлагаемый в [3] «закон движения отражённой волны $r_w \sim t^\alpha$ » следует рассматривать не более как необоснованную гипотезу. Авторы косвенно подтверждают это фразой: «Более подробным исследованием этого движения мы здесь заниматься не будем».

Для исследования параметров течения за сходящейся УВ с помощью уравнения для скорости звука $C^2 = \gamma P / \rho$ из уравнений (6) исключается P . В результате эти уравнения принимают вид

$$\gamma \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \gamma \rho U \frac{\partial U}{\partial r} + C^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial C^2}{\partial r} = 0, \quad C^2 (1 - \gamma) \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + \rho \left(\frac{\partial C^2}{\partial t} + U \frac{\partial C^2}{\partial r} \right) = 0. \quad (13)$$

Уравнения (5) и (13) после перехода к безразмерным величинам с помощью соотношений (12) принимают форму

$$\xi \delta M' - (1 - M) \xi \delta' + 3 \delta M = 0; \quad (14)$$

$$\alpha (1 - M) \gamma \delta \xi M' - \alpha Z \xi \delta' - \alpha \xi \delta Z' - 2 \alpha \delta Z + \gamma \delta M (1 - \alpha M) = 0; \quad (15)$$

$$(\gamma - 1) Z \xi (1 - M) \alpha \delta' - \alpha \xi \delta (1 - M) Z' - 2 Z \delta (1 - \alpha M) = 0, \quad (16)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по ξ . Затем уравнения (14) – (16) записываются в виде

$$\delta' = \frac{\delta R}{(1 - M) \xi \gamma \alpha (Z - (1 - M)^2)}, \quad M' = \frac{1}{\xi} \left(\frac{R}{\gamma \alpha (Z - (1 - M)^2)} - 3M \right), \quad (17)$$

$$Z' = \frac{Z}{\alpha \xi (1 - M)} \left(\frac{(\gamma - 1) R}{\gamma (Z - (1 - M)^2)} - 2(1 - \alpha M) \right), \quad (18)$$

где $R = \gamma M (1 - M) (1 - \alpha M) - 3 \gamma \alpha M (1 - M)^2 - 2(\alpha - 1)Z$. В момент фокусировки УВ $t = 0$. Из (7) следует, что $\xi = \infty$ при $t = 0$ и любом $r > 0$. Значения функций $\delta(\xi)$, $M(\xi)$ и $Z(\xi)$ при $\xi = \infty$ обозначим δ_∞ , M_∞ и Z_∞ . Численные значения δ_∞ , M_∞ , Z_∞ можно определить только, решив систему уравнений (17), (18). Авторы [2, 3] полагают, что $M_\infty = 0$, $Z_\infty = 0$. Значение α находится с помощью анализа интегральных кривых уравнений (17), (18).

Из сказанного выше следует, что решение из [2, 3] без дополнительных исследований отражённой УВ и распределений ρ , U и P вдоль радиуса в момент фокусировки является всего лишь важной составной частью эталонного решения. Для получения эталонного решения необходимо выделить шар конечного размера и определить граничные условия. Для контроля точности любого из методов расчёта ударных волн [8] в лагранжевых координатах необходимо дополнительно определить зависимости $P(t)$ и $U(t)$ на траектории границы, в случае же метода в эйлеровых координатах – определить зависимости $P(t)$, $\rho(t)$, $U(t)$, $E(t)$ на поверхности с постоянным радиусом.

Исследований поведения энтропии S в любой момент времени t , в том числе и в момент фокусировки, в [2, 3] не проводилось. Зависимости $P(r) \sim r^{2(\alpha-1)/\alpha}$, $U(r) \sim r^{(\alpha-1)/\alpha}$ в момент фокусировки не могут быть использованы в качестве эталона, так как в них отсутствуют коэффициенты, зависящие от γ , n и других параметров задачи.

Аналитическое решение К.В. Брушлинского и Я.М. Каждана [4]

Движение газа за волной описывается уравнениями (5), (6). Автомодельная переменная вводится иначе, чем в [2, 3], и имеет вид

$$\xi = -t / r^K, \quad (19)$$

где $K > 1$. Безразмерные величины определяются уравнениями

$$U = \frac{r}{Kt} M(\xi), \quad \rho = \rho_0 \delta(\xi), \quad P = \rho_0 \frac{r^2}{K^2 t^2} \Pi(\xi). \quad (20)$$

В момент фокусировки $t = 0$, и таким образом до момента фокусировки $t < 0$ и соответственно $\xi > 0$. На УВ при $\xi = 1$ из (19) получается траектория и скорость УВ:

$$r_w = (-t)^{1/K}, \quad D = -\frac{1}{K} (-t)^{(1-K)K} = \frac{r_w}{Kt}.$$

Соотношения (2) преобразуются с помощью выражения для D

$$U_w = \frac{2}{\gamma+1} \frac{r_w}{Kt}, \quad P_w = \frac{2}{\gamma+1} \rho_0 \frac{r_w^3}{K^2 t^2}. \quad (21)$$

Из сравнения (2), (20) и (21) следует

$$\delta_w = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad M_w = \frac{2}{\gamma+1}, \quad \Pi_w = \frac{2}{\gamma+1}.$$

Уравнения для безразмерных величин δ , M , Π имеют вид

$$\delta' = \frac{\delta \left[2\delta M(1-M)^2 - (K-1)(2\Pi - \delta M(1-M)) \right]}{K\xi(1-M)(\gamma\Pi - \delta(1-M))^2}; \quad (22)$$

$$M' = \frac{3\gamma\Pi M + 2\Pi(1-K) + \delta M(1-M)(M-K)}{K\xi(\gamma\Pi - \delta(1-M))^2}; \quad (23)$$

$$\Pi' = \frac{\Pi \left[2\gamma\Pi - 2(\gamma-1)\delta(1-M)^2 + 2\gamma\delta(1-M) - (K-1)\delta((2-\gamma)(1-M) + \gamma) \right]}{K\xi(\gamma\Pi - \delta(1-M))^2}. \quad (24)$$

Для определения показателя автомодельности K авторы [4] переходят к переменным $Y = 1 - M$ и $Z = \gamma\Pi / \delta(1 - M)$ и вместо уравнений (22) – (24) рассматривают два уравнения $Y' = q(Y, Z) / K\xi(Z - Y)$, $Z' = f(Y, Z)Z / K\xi Y(Z - Y)$. Исследование интегральных линий этой системы уравнений приводит к неединственным зависимостям $K(\gamma)$ для разных диапазонов изменения γ .

После определения K функции $\delta(\xi)$, $M(\xi)$, $\Pi(\xi)$ находятся численным интегрированием уравнений (22) – (24) в промежутке $1 \geq \xi \geq 0$. При $\xi \rightarrow 0$ в решении уравнений (22) – (24) возникают затруднения. Если $\delta(0)$, $M(0)$, $\Pi(0)$ конечны, то при $\xi = 0$ $M'(0) = \infty$, $\delta'(0) = \infty$, $\Pi'(0) = \infty$. Но для возникновения бесконечных производных нет физических причин. Чтобы ограничить производные, в [4] полагают $M(0) = 0$, $\Pi(0) = 0$. В этом случае числители в (22) – (24) обращаются в ноль и для нахождения распределений $U(r)$, $P(r)$ при $t = 0$ нужно в (20) раскрывать неопределённости. Значение $\delta(0) = \text{const}$ и, следовательно, $\rho = \text{const}$ в момент фокусировки.

В этом решении, как и в предыдущем, вопрос о траектории отражённой от центра УВ и о её начальных параметрах нуждается в дополнительных исследованиях, без которых применение этого решения для контроля точности численных методов расчёта УВ проблематично. Исследование поведения энтропии в работе [4] не проводилось. Распределения $P(r)$, $U(r)$, $\rho(r)$ в момент фокусировки отсутствуют. Таким образом, изложенное в [4] аналитическое решение, как и решение из [2, 3], не является эталонным.

Аналитическое решение В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковской, М.Н. Якимовой [9]

В отличие от [2–7] рассматривается сжатие газового шара конечного размера. В начальный момент времени t_0 задана координата границы шара $r = r_0$. Уравнение состояния имеет вид (1). При $t = t_0$ в газе $P_0 = 0$, $\rho_0 = \text{const}$, $U_0 = 0$, но на границе задана скорость $U_{10} < 0$. При $t > t_0$ из точки t_0, r_0 в газ со скоростью D станет распространяться ударная волна, на фронте которой выполнены условия (2). Течение газа между УВ и границей шара определяется уравнениями (5), (6). Для решения уравнений (5), (6) совершается переход от переменных t, r к новым переменным $t, \xi(r, t)$, и P, ρ, U записываются в виде

$$P = \alpha_p(t)\Pi(\xi), \quad \rho = \alpha_\rho(t)\delta(\xi), \quad U = \alpha_u(t)M(\xi). \quad (25)$$

Производные по t обозначим точкой сверху величины, производные по ξ – штрихом. После перехода к новым переменным уравнения (5), (6) принимают вид

$$\varphi_1\delta + \omega\xi\delta' + M\delta' + \delta M' + \frac{2M\delta}{\xi} = 0, \quad \varphi_2\delta M + \omega\delta\xi M' + \delta M M' + \Pi' = 0; \quad (26)$$

$$\varphi_3\Pi + \omega\xi\Pi' + M\Pi' + \gamma\Pi M' + \frac{2\gamma M\Pi}{\xi} = 0, \quad (27)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{\dot{\alpha}_\rho}{\alpha_\rho\beta}, \quad \varphi_2 = \frac{\dot{\alpha}_u}{\alpha_u\beta}, \quad \varphi_3 = \frac{\dot{\alpha}_P}{\alpha_P\beta}, \quad \omega = \frac{\partial\xi}{\partial t} / \xi\beta, \quad \beta = \alpha_u \frac{\partial\xi}{\partial r}. \quad (28)$$

Для разделения уравнений (26), (27) на две системы уравнений, одна из которых содержит величины, зависящие от t , а вторая от ξ , нужно, чтобы было

$$\varphi_1(t) = \text{const}, \quad \varphi_2(t) = \text{const}, \quad \varphi_3(t) = \text{const}, \quad \omega(t) = \text{const}. \quad (29)$$

Условия (29) выполняются, если функция $\xi(t, r)$ линейно зависит от r :

$$\xi = rf(t). \quad (30)$$

Если задать траекторию УВ $r_w = r_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n$ и положить на УВ $\xi_w = 1$, то из (30) получаются выражения для $f(t)$ и $\xi(r, t)$:

$$f(t) = \frac{1}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n, \quad \xi = \frac{r}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n, \quad (31)$$

где t_f – момент фокусировки УВ. Продифференцировав $r_w(t)$ по t , получим скорость УВ

$$D = -\frac{r_0 n}{t_f - t_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}. \quad (32)$$

Из (2), (25) и (32) следуют два уравнения на фронте УВ:

$$U_w = -\frac{2}{\gamma + 1} \frac{r_0 n}{t_f - t_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}, \quad \alpha_u(t) M_w = -\frac{2}{\gamma + 1} \frac{r_0 n}{t_f - t_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}.$$

Потребовав, чтобы $M_w = \text{const}$ не зависело от r_0, t_0, t_f и n , получим

$$M_w = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \alpha_u(t) = -\frac{r_0 n}{t_f - t_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}. \quad (33)$$

При $t = t_0$ из (2) и (32) определяется зависимость t_f от n :

$$t_f = t_0 - \frac{2r_0 n}{(\gamma + 1)u_{10}}.$$

Значения δ_w, Π_w и зависимости $\alpha_\rho(t), \alpha_p(t)$ получаются по аналогии с M_w и $\alpha_u(t)$:

$$\delta_w = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad \alpha_\rho = \rho_0, \quad \Pi_w = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \alpha_p = \rho_0 D_{10}^2 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{2(n-1)}. \quad (34)$$

Из (28), (33) и (34) определяются $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{n-1}{n}, \varphi_3 = \frac{2(n-1)}{n}, \omega = -1$. С помощью полученных значений $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \omega$ уравнения (26), (27) преобразуются к виду

$$M' = \frac{R - 2\gamma M \Pi n}{n\xi(\gamma \Pi - (M - \xi)^2 \delta)}, \quad \delta' = \frac{\delta [2M\delta n(M - \xi)^2 - R]}{n\xi(M - \xi)(\gamma \Pi - (M - \xi)^2 \delta)}; \quad (35)$$

$$\Pi' = \frac{\delta \Pi [(n-1)\xi(2(M - \xi) - \gamma M) + 2\gamma M(M - \xi)n]}{n\xi(\gamma \Pi - (M - \xi)^2 \delta)}, \quad (36)$$

где $R = (n-1)\xi(\delta M(M - \xi) - 2\Pi)$.

Функции $\delta(\xi), \Pi(\xi), M(\xi)$ находятся путём интегрирования уравнений (35), (36) в области $1 \leq \xi \leq \infty$. Значение $\xi = \infty$ соответствует точкам с $r > 0$ и $t = t_f$. Значение n находится в процессе интегрирования уравнений (35), (36) из условия одновременного обращения в ноль числителей и знаменателя в (35), (36). Полученные в [9] значения $n(\gamma)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

γ	1.1	1.2	4/3	1.4	5/3
n	0.795973	0.757142	0.729259	0.717175	0.688377
δ_∞	184.465	59.5525	26.5447	20.0714	9.549680

Результатом интегрирования уравнений (35), (36) являются зависимости $\delta(\beta), M(\xi), \Pi(\xi)$. Они таковы, что $\delta_\infty = \text{const}, M_\infty = 0, \Pi_\infty = 0$. Для построения зависимостей $\rho(r), U(r), P(r)$ в заданный момент времени $t_* < t_f$ необходимо найти из уравнений (33), (34) значения $\alpha_u(t_*), \alpha_\rho, \alpha_p(t_*)$, затем для заданного значения r_* найти ξ_* из уравнения (31), определить $\delta(\xi_*), M(\xi_*), \Pi(\xi_*)$ и рассчитать $\rho(r_*, t_*), U(r_*, t_*), P(r_*, t_*)$ по уравнениям (25).

В момент фокусировки при $t = t_f$ из (33) и (34) следует, что $\alpha_u = \infty$. При подстановке этих значений в (25) вместе с M_∞ и Π_∞ возникают неопределённости типа $\infty \cdot 0$. Этого нет в случае плотности ρ . Поскольку при $t = t_f$ $\delta_\infty = \text{const}$, то плотность при $t = t_f$ постоянна:

$$\rho_\infty = \rho_0 \delta_\infty.$$

Значения δ_∞ для разных γ приведены в табл. 1. Для нахождения зависимости $P(r)$ в момент фокусировки воспользуемся энтропией, которая возникает на фронте ударной волны и далее сохраняется вдоль траектории каждой частицы вещества. Заменим зависимость $D(t)$ (32) зависимостью $D(r)$ с помощью (31):

$$D_w = -\frac{r_0 n}{t_\Phi - t_0} \left(\frac{r_w}{r_0} \right)^{\frac{n-1}{n}}. \quad (37)$$

Радиусу r_w соответствует масса $m_w(4)$. При $t = t_f$ эту же массу имеет шар с плотностью ρ_∞ , следовательно

$$r = r_w \delta_*^{-\frac{1}{3}}. \quad (38)$$

Преобразуем формулу (3). Обозначим энтропию S в точке t_0, r_0 через S_0 . Тогда (3) примет вид

$$S = S_0 \left(\frac{D}{D_0} \right)^2. \quad (39)$$

Подставив (4), (37), (38) в (39), получим зависимость S от r в момент фокусировки:

$$S = S_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{2(n-1)}{n}} \delta_\infty^{\frac{2(n-1)}{3n}}. \quad (40)$$

Зависимость $P(r)$ в момент фокусировки следует из (1) и (40):

$$P = P_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\frac{2(1-n)}{n}} \delta_\infty^{\gamma + \frac{2(n-1)}{n}}, \quad (41)$$

где $P_0 = S_0 \rho_0^\gamma$. Поскольку $n < 1$, то из (41) видно, что $P \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. Зависимость $U(r)$ при $t \rightarrow t_f$ определяется как предел зависимостей $U(r, t)$ для $t \rightarrow t_f$.

Изложенное решение было применено для оценки точности нескольких методов расчёта ударных волн. Холодный газовый шар размером $r_0 = 1$ имел параметры $P_0 = 0, \rho_0 = 1, U_0 = 0, U_{01} = -1, \gamma = 5/3$. Граничное условие определялось следующим образом. Масса шара не зависит от времени. В момент t_* она равна сумме m_w и массы газа между УВ и границей:

$$\frac{4}{3} \pi \rho_0 r_w^3 + \int_{r_w}^{r_*} 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4}{3} \pi \rho_0 r_0^3. \quad (42)$$

Перейдём к интегрированию по ξ . При $t = t_*$ из (31) следует зависимость $r(\xi)$

$$r = r_0 \xi \left(\frac{t_f - t_*}{t_f - t_0} \right)^n. \quad (43)$$

Подставив (43) в (42), получим уравнение, в котором ξ_* является безразмерной координатой границы:

$$3 \int_1^{\xi_*} \delta \xi^2 d\xi = \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t_*} \right)^{3n} - 1.$$

По значению ξ_* из зависимостей $M(\xi), \Pi(\xi)$ определяются M_*, Π_* , а из (25) – U и P на границе шара. Координата границы находится из (43) по ξ_* . Зависимость скорости границы от времени приведена в табл. 2.

Таблица 2

№ п/п	t	U	№ п/п	t	U	№ п/п	t	U
1	0.04	-1.008792	11	0.24	-1.042656	21	0.34	-1.042843
2	0.07	-1.015162	12	0.25	-1.043463	22	0.35	-1.041620
3	0.10	-1.021257	13	0.26	-1.044130	23	0.36	-1.040097
4	0.13	-1.026982	14	0.27	-1.044643	24	0.37	-1.038252
5	0.16	-1.032224	15	0.28	-1.044992	25	0.38	-1.036058
6	0.18	-1.035381	16	0.29	-1.045165	26	0.39	-1.033458
7	0.20	-1.038211	17	0.30	-1.045146	27	0.40	-1.030514
8	0.21	-1.039486	18	0.31	-1.044921	28	0.42	-1.023220
9	0.22	-1.040657	19	0.32	-1.044474	29	0.45	-1.008354
10	0.23	-1.041717	20	0.33	-1.043787	30	0.50	-0.9699473

На рис. 1 приведены зависимости $P(r)$ и $U(r)$ на момент времени $t_* = 0.45$, полученные в аналитическом решении и по методу ВОЛНА [10] на равномерной по r сетке с числом точек $N = 100$.

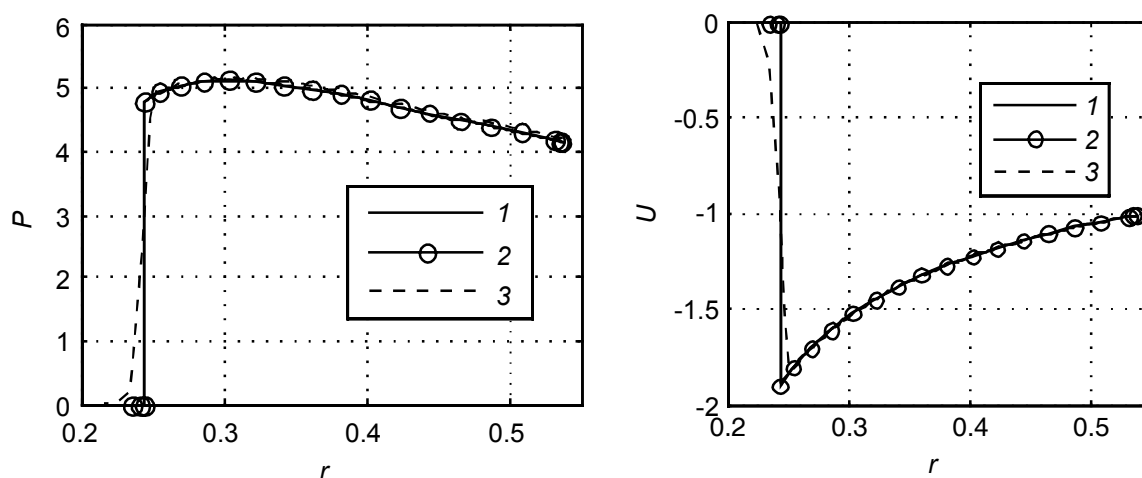


Рис. 1. Аналитическое решение из [9] (кр. 1), расчёт по методу [10] с выделением фронта УВ (кр. 2), расчёт по методу [10] без выделения фронта УВ (кр. 3)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guderley G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse // Luftfahrtforschung. – 1942. – Bd. 19. – Lfg. 9. – S. 302–312.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. – М.: Наука, 1971. – 854 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
4. Брушлинский К. В., Каждан Я. М. // Успехи математических наук. – 1963. – Т. XVIII. – Вып. 2(110). – С. 3–23.
5. Крайко А. Н. // Proceedings of VII ZST, Sneshinsk, Russia. – 2003. <http://www.vniitf.ru/rig/konfer/ZST/reports/6-1.Pdf>. 13p./.
6. Крайко А. Н. // ПММ. – 1996. – Т. 60. – Вып. 6. – С. 1000–1007.
7. Валиев Х. Ф. // ПММ. – 2009. – Т. 73. – Вып. 3. – С. 397–407.
8. Куропатенко В. Ф. // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Сер. Б.Т. VII-1. Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. Ч. 2. – Янус-К, 2008. – С. 496–500.
9. Куропатенко В. Ф., Шестаковская Е. С., Якимова М. Н. // XII Междунар. конф. «Забабихинские научные чтения-2014». – Снежинск, 2014.
10. Куропатенко В. Ф., Кузнецова В. И., Михайлова Г. И. и др. // ВАИТ. Сер. Математическое моделирование физ. процессов. – 1989. – Вып. 2. – С. 9–26.

НИИ прикладной математики и механики Национального исследовательского
Томского государственного университета, г. Томск, Россия
E-mail: V.F.Kuropatenko@rambler.ru

Поступила в редакцию 12.09.14.

V.F. KUROPATENKO

ANALYTICAL SOLUTIONS FOR CONVERGING SHOCKS

The paper analyzes a number of analytical solutions for converging shocks in cold gas. It is shown that none of them can be used without a considerable further examination as a reference one for checking the numerical shock capture methods for accuracy. A new analytical solution is derived and used as reference. Calculations by two methods in comparison with the reference are provided.

Keywords: shock, self-similarity, analytical solution, pressure, velocity, entropy.

REFERENCES

1. Guderley G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse. *Luftfahrtforschung*, 1942, bd. 9, lfg. 9, s. 302–312.
2. Stanyukovich K.P. *Neustanovivshiesya dvizheniya sploshnoi sredy* [Transient Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 854 p.
3. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika* [Theoretical Physics]. Vol. 6, Hydrodynamics. Moscow, Nauka Publ., 1986, 736 p.
4. Brushlinsky K.V., Kazhdan Y.M. Ob avtomodelnykh resheniyakh nekotorykh zadach gazovoy dinamiki [On self-similar solutions for some hydrodynamic problems]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1963, vol. XVIII, iss. 2(110), pp. 3–23.
5. Kraiko A.N. Sfericheski i tsilindricheski simmetrichnoe nestatsionarnoe szhatie idealnogo gaza [Spherically and cylindrically symmetric non-stationary compression of ideal gas]. *Proceedings of ZST-VII Conference*. Snezhinsk, Russia, 2003, <http://www.vniitf.ru/ring/konfer/ZST/reports/6-1.Pdf>. 13p./.
6. Kraiko A.N. O neogranichennoi kumulyatsii pri odnomernom nestatsionarnom szhatii idealnogo gaza [Unlimited cumulation in 1D non-stationary compression of ideal gas]. *Prikladnaya matematika i mekhnika*, 1996, vol. 60, iss. 6, pp. 1000–1007.
7. Valiev K.F. Otrazheniya udarnoy volny ot tsentra ili osi simmetrii pri pokazatelnykh adiabaty ot 1.2 do 3 [Shock reflection from the center or symmetry axis for adiabatic exponents between 1.2 and 3]. *Prikladnaya matematika i mekhnika*, 2009, vol. 73, iss. 3, pp. 397–407.
8. Kuropatenko V.F. Metody raschyota udarnykh voln [Shock capture methods]. Entsiklopediya nizkotemperaturnoy plazmy, B.T. VII-1 Ser. *Matematicheskoe modelirovanie nizkotemperaturnoy plazmy*. Part 2. Janus-K Publ., 2008, pp. 496–500.
9. Kuropatenko V.F., Shestakovstaya E.S., Yakimova M.N. Dinamicheskoe szhatie kholodnogo gazovogo shara [Dynamic compression of a cold gas sphere]. *XII Zababakhin Scientific Talks Conference*. Snezhinsk, 2014.
10. Kuropatenko V.F., Kuznetsova V.I., Mikhailova G.I., Kovalenko G.V., Sapozhnikova G.N. Komplex programm VOLNA i neodnorodny raznostnyi metod dlya raschyota neustanovivshikhsya dvizheniy szhimaemykh sploshnykh sred [VOLNA code and method for solving transient continua compression]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki*, Ser. *Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov*, 1989, iss. 2, pp. 9–26.