ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2012, том 446, № 4, с. 401–403

МЕХАНИКА

УДК 532.529

СКОРОСТЬ ЗВУКА В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ

© 2012 г. В. Ф. Куропатенко

Представлено академиком В.А. Левиным 18.04.2012 г.

Поступило 04.06.2012 г.

В идеальной однородной сплошной среде скорость звука C определяется формулой Лапласа

$$C^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S, \tag{1}$$

где P – давление, ρ – плотность, S – энтропия. Следствием применения формулы (1) для получения скорости звука в двухкомпонентной смеси [1–3] при некоторой системе упрощающих гипотез и $N = 2$ стала формула

$$\frac{1}{\rho C^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{\rho_i C_i^2}, \tag{2}$$

где ρ_i, C_i, α_i – плотность, скорость звука и объемная концентрация i-го компонента, i – номер компонента, ρ, C – плотность и скорость звука смеси. Необычность формулы (2) заключается в том, что зависимость C от α является немонотонной. Она достигает минимального значения

$$C_m = \frac{2C_1C_2\sqrt{\rho_1\rho_2(\rho_2-\rho_1)(\rho_2C_2^2-\rho_1C_1^2)}}{\rho_2^2C_2^2-\rho_1^2C_1^2}$$

при

$$\alpha_m = \frac{C_1^2(\rho_2-\rho_1)^2+\rho_2^2(C_2^2-C_1^2)}{2(\rho_2-\rho_1)(\rho_2C_2^2-\rho_1C_1^2)}.$$

Из [1–4] видно, что формула (2) половину века повторяется в различных монографиях.

Покажем, что при тех же упрощающих гипотезах из (1) можно получить и другие зависимости $C(C_i, \alpha_i)$. Параметры смеси связаны с соответствующими параметрами компонентов мгновенными законами сохранения и их следствиями:

$$P = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i, \quad S = \sum_{i=1}^{N} \eta_i S_i, \tag{3}$$

$$V = \sum_{i=1}^{N} \eta_i V_i, \tag{4}$$

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \rho_i, \tag{5}$$

$$u = \sum_{i=1}^{N} \eta_i u_i, \tag{6}$$

где P_i, S_i, u_i, η_i – давление, энтропия, скорость и массовая концентрация i-го компонента, N – число компонентов. Концентрации α_i и η_i удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{N} \eta_i = 1, \quad \eta_i\rho = \alpha_i\rho_i. \tag{7}$$

Согласно [5] смесь не имеет уравнения состояния, и применение уравнения (1) для определения скорости звука смеси требует конкретизации ее свойств. Скорость распространения малого возмущения (звука) в любой среде определяется уравнением $C = \frac{\Delta L}{\Delta t}$, где ΔL – расстояние, пройденное возмущением за время Δt. Будем исходить из этого определения скорости звука.

Рассмотрим находящуюся в равновесном состоянии смесь, каждый компонент которой характеризуется следующими величинами: ρ_{i0} = const, $u_{i0} = 0$, $P_{i0} = P_0$ = const, S_{i0} = const, η_{i0} = const, α_{i0} = = const, $F_{i0} = 0$, C_{i0} = const.

Сформулируем систему упрощающих гипотез, в рамках которой получим разные зависимости скорости звука смеси от скоростей звука компонентов:

1) звук является малым возмущением: $f = f_0 + \delta f$, $f_i = f_{i0} + \delta f_i$;

2) звук обратим: $\delta S = 0$, $S = S_0, \delta S_i = 0, S_i = S_{i0}$;

3) время релаксации давлений равно нулю: $\delta P_i = \delta P$;

4) все $\delta\alpha_i$ и $\delta\eta_i$ (i = 1, 2, ..., N) имеют одинаковый знак.

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский научно-исследовательский институт
технической физики им. Е.И. Забабахина,
Снежинск Челябинской обл.

Следствие четвертого условия и уравнений (7) имеет вид

$$\delta\alpha_i = 0, \quad \alpha_i = \alpha_{i0}, \quad \delta\eta_i = 0, \quad \eta_i = \eta_{i0}. \qquad (8)$$

Для вывода зависимости C от C_i рассмотрим уравнение (4). После его линеаризации с учетом (8) получим зависимость δV от δV_i

$$\delta V = \sum_{i=1}^{N} \eta_i \delta V_i.$$

Разделим левую часть этого уравнения на δP, правую – на $\delta P_i = \delta P$ и перейдем к пределу при $\delta \mathrm{P} \to 0$, $\delta V \to 0$, $\delta V_i \to 0$. В результате в соответствии с (1) получим уравнение

$$\frac{1}{\rho^2 C^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\eta_i}{\rho_i^2 C_i^2} \qquad (9)$$

Из третьего уравнения (7) выразим η_i и подставим в (9). После сокращения общих множителей получим уравнение (2).

В рамках сформулированных выше гипотез вместо уравнения (4) возьмем уравнение (5). После его линеаризации с учетом (8) получим

$$\delta\rho = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta\rho_i.$$

Разделив это уравнение на $\delta P = \delta P_i$ и перейдя к пределу при $\delta P \to 0$, $\delta\rho \to 0, \delta\rho_i \to 0$, получим уравнение, которое с помощью (1) преобразуется к виду

$$\frac{1}{C^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{C_i^2}. \qquad (10)$$

При выводе уравнения (10) было использовано уравнение (5), при выводе уравнения (2) – уравнение (4). И хотя уравнения (4) и (5) одинаково точны, следствия из них при одних и тех же упрощающих гипотезах оказались разными.

Третий способ получения зависимости $C = C(C_i, \alpha_i)$ рассмотрим в рамках модели многокомпонентной среды [5]. В случае идеальной среды без теплопроводности и химических реакций законы сохранения массы и импульса i-го компонента в одномерном случае имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i\rho_i u_i) = 0, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i u_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i\rho_i u_i^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i(P_i + F_i)) - R_i = 0. \qquad (12)$$

Связь давления P_i с плотностью ρ_i в изэнтропическом течении устанавливается уравнением состояния

$$P_i = P_i(\rho_i, S_i). \qquad (13)$$

Из (13) и (1) следуют зависимости между производными плотности и давления:

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t} = \frac{1}{C_i^2}\frac{\partial P_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial\rho_i}{\partial x} = \frac{1}{C_i^2}\frac{\partial P_i}{\partial x}. \qquad (14)$$

Законы сохранения массы и импульса смеси идеальных сред без теплопроводности в одномерном случае таковы

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial x}(P + F) = 0. \qquad (16)$$

Ограничимся рассмотрением изэнтропических течений, в которых

$$S_i = \mathrm{const}, \quad \frac{\partial S_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial S_i}{\partial x} = 0,$$

$$S = \mathrm{const}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

Перейдем в (11), (12) и (15), (16) к малым возмущениям. Из [5] следует, что функции F_i, F, R_i таковы, что

$$\delta F_i = 0, \quad \delta F = 0, \quad \delta R_i = 0.$$

В результате получим четыре уравнения, которые после замены производных ρ_i производными P_i с помощью (14) и учета требований четырех упрощающих гипотез запишем в характеристической форме. В i-м компоненте и смеси вдоль характеристик

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_i = \pm C_i, \quad \frac{dx}{dt} = \pm C$$

справедливы уравнения

$$\frac{\partial\delta \mathrm{P}_i}{\partial t} \pm \rho_i C_i \frac{\partial\delta u_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\delta \mathrm{P}}{\partial t} \pm \rho C \frac{\partial\delta u}{\partial t} = 0. \qquad (17)$$

После интегрирования уравнений (17) в бегущей волне с сохранением Z_i и Z инвариантов получаем связь δu_i с δP_i и δu с δP

$$\frac{\delta u_i}{\delta P_i} = \frac{1}{\rho_i C_i}, \quad \frac{\delta u}{\delta P} = \frac{1}{\rho C}. \qquad (18)$$

Теперь воспользуемся уравнением (6). После линеаризации с учетом (7) оно имеет вид

$$\delta u = \sum_{i=1}^{N} \eta_i \delta u_i. \qquad (19)$$

После деления уравнения (19) на $\delta P_i = \delta P$ и подстановки соотношений (18) получим уравнение

$$\frac{1}{\rho C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\eta_i}{\rho_i C_i}. \qquad (20)$$

Выразив из (7) η_i и подставив в (20), получим связь C с C_i в виде

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{C_i}. \qquad (21)$$

Таблица 1

Вещество	ρ_{0k}, г/см^3	C_{0k}, км/с	γ	n	ρ_0, г/см^3	E_0, кДж/г	C_0, км/с
W	19.35	4.051	2.67	3.6	19.2	0.07650	4.036
$C_{22}H_{46}$	0.930	3.357	1.667	3.5	0.91	0.364444	3.328

Результат можно сформулировать так. В рамках одних и тех же упрощающих гипотез при выборе одного из трех одинаково строгих в теории многокомпонентных сред уравнений (4)–(6) получаются разные зависимости C от C_i (2), (10) и (21).

Для получения аргументов в пользу одной из трех зависимостей $C = C(C_i, \alpha_i)$ рассмотрим смесь в виде набора плоских слоев – компонентов. Каждый i-й слой имеет массу Δm_i, а вся смесь – массу $\Delta m = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i$. При распространении плоской ударной волны по слоистой системе каждый i-й слой ударная волна проходит со скоростью W_i за время

$$\Delta t_i = \frac{\Delta m_i}{W_i}. \qquad (22)$$

От одной границы смеси до другой ударная волна пройдет за время

$$\Delta t = \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i. \qquad (23)$$

Определим среднюю скорость ударной волны в смеси уравнением

$$W = \frac{\Delta m}{\Delta t}. \qquad (24)$$

Подставив Δt_i из (22) и Δt из (24) в (23), получим уравнение

$$\frac{\Delta m}{W} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i}{W_i}. \qquad (25)$$

Отношение Δm_i к Δm есть массовая концентрация η_i. Из теории ударных волн известно, что

$$W = \rho(D - u), \quad W_i = \rho_i(D_i - u_i). \qquad (26)$$

Звуковое возмущение является бесконечно слабым. На бесконечно слабой ударной волне

$$D = u + C, \quad D_i = u_i + C_i. \qquad (27)$$

Из (25)–(27) следует, что на звуковой волне

$$\frac{1}{\rho C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\eta_i}{\rho_i C_i}. \qquad (28)$$

Выразив из (7) η_i, подставив η_i в (28) и сократив общие множители, получим уравнение (21).

В качестве еще одного аргумента по программе ВОЛНА [6] было рассчитано распространение ударной волны по слоистой системе из плоских слоев вольфрама и парафина. Уравнения состояния парафина и вольфрама были взяты в виде

$$P = (\gamma - 1)\rho E + \frac{\rho_{0k} C_{0k}^2}{n}\left(\frac{n-\gamma}{n-1}\delta^n + \frac{(\gamma-1)n}{n-1}\delta - \gamma\right).$$

В табл. 1 приведены параметры уравнения состояния и начальные характеристики вольфрама и парафина при $P_0 = 10^{-4}$ ГПа, $T_0 = 293$ K.

Расчеты для разных значений α_W проводили на сходимость по числу пар слоев и по стремящейся к нулю амплитуде начального возмущения. Результаты расчетов с точностью шести знаков совпадают с расчетом C по формуле (21).

Из сказанного выше следует, что наиболее точно скорость звука многокомпонентной смеси описывается формулой (21).

Работа поддержана РФФИ, грант 10–01–00032.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wood A.B.* Textbook of Sound. L.: Bell&Sons, 1941.
2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
3. *Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е.* Теплообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984.301 с.
4. *Лобойко Б.Г., Диков Ю.Н., Смирнов Е.Б.* Сборник задач по газодинамике взрыва. Снежинск.: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2006. 249 с.
5. *Куропатенко В.Ф.* // ДАН. 2005. Т. 403. № 6. С. 761–763.
6. *Куропатенко В.Ф., Коваленко Г.В., Кузнецова В.И. и др.* Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. М., 1989. В. 2. С. 9–17.