



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. F. Kuropatenko, I. R. Makeyeva, Study of discontinuity distraction for methods of shock wave calculations, *Matem. Mod.*, 2006, Volume 18, Number 3, 120–128

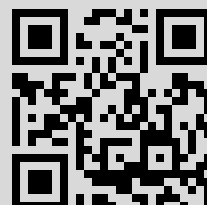
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 109.230.135.28

August 26, 2018, 13:08:44



## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСТРАКЦИИ РАЗРЫВОВ В МЕТОДАХ РАСЧЕТА УДАРНЫХ ВОЛН

© В.Ф. Куропатенко, И.Р. Макеева

Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики

456770, г. Снежинск Челябинской области, а.я.245.

*v.f.kuropatenko@vniitf.ru; i.r.makeyeva@vniitf.ru;*

При моделировании течений сплошных сред с ударными волнами и слабыми разрывами, перемещающимися по веществу, поверхность разрыва, как правило, заменяется переходным слоем конечной толщины (дистракция разрыва), которая зависит как от применяемого метода, так и от рассчитываемого разрыва. Предлагается уточненный метод исследования дистракции разрывов в численных методах для решения уравнений гидродинамики, позволяющий определить дистракцию ударных волн произвольной интенсивности. Вводится понятие эффективной дистракции, и исследуются дистракция и эффективная дистракция для методов Неймана-Рихтмайера, Лакса, Годунова и Куропатенко.

## STUDY OF DISCONTINUITY DISTRACTION FOR METHODS OF SHOCK WAVE CALCULATIONS

*V.F. Kuropatenko, I.R. Makeyeva*

Russian Federal Nuclear Center – All-Russia Scientific Research  
Institute of Technical Physics

In numerical modeling of continuum flows with shock waves the discontinuity surface is as usual replaced by transition layer of a finite width (discontinuity distraction) which depends on both the used method and the type of discontinuity. A specified method is proposed to study discontinuity distraction for numerical techniques used to solve the hydrodynamics equations. This method allows to determine the distraction of shock waves of arbitrary intensity. A term “effective distraction” is introduced and distraction and effective distraction for Neumann-Richtmayer, Lax, Godunov and Kuropatenko techniques are studied.

### Введение

В разностных методах, предназначенных для численного описания течений сплошных сред с ударными волнами и слабыми разрывами, перемещающимися по веществу, поверхность разрыва заменяется переходным слоем конечной толщины (дистракция разрыва), которая зависит как от применяемого метода, так и от рассчитываемого разрыва. Чаще всего ширина переходного слоя составляет несколько сеточных ячеек. Для количественного описания дистракции введем безразмерную величину, равную отношению толщины переходного слоя к размеру сеточной ячейки

$$D = \left| \frac{m_1 - m_0}{h} \right|,$$

где  $m_0$  – значение  $m$ , при котором все величины описывают состояние перед разрывом,  $m_1$  – за разрывом. Безразмерную толщину  $D$  переходного слоя будем называть, как и само явление, дистракцией. Одновременно с характеристикой численного решения дистракция  $D$ , вообще гово-

ря, является и характеристикой разностной схемы.

Впервые дистракцию ударной волны применительно к своей разностной схеме рассмотрели Нейман и Рихтмайер в [1]. Для описания диссипации энергии в ударной волне в дифференциальные законы сохранения

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial m}, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial m}(P+q), \quad \frac{\partial E}{\partial t} = -(P+q)\frac{\partial V}{\partial t}$$

в [1] была введена псевдовязкость вида

$$q = C^2 h^2 V \left( \frac{\partial U}{\partial m} \right)^2. \quad (1)$$

Здесь  $V$  – удельный объем,  $U$  – скорость,  $P$  – давление,  $E$  – удельная внутренняя энергия,  $t$  – время,  $m$  – массовая лагранжева координата,  $h$  – шаг сетки по координате  $m$ ,  $C$  – эмпирическая постоянная.

Известно [2], что введение в законы сохранения физической вязкости или псевдовязкости приводит к замене разрыва непрерывным решением. В случае стационарной ударной волны, распространяющейся со скоростью  $W = \text{const}$ , после перехода к автомодельной переменной  $\xi = m - Wt$  дифференциальные законы сохранения принимают вид

$$WV' + U' = 0, \quad WU' - (P+q)' = 0, \quad E' + (P+q)V' = 0, \quad (2)$$

где штрих означает дифференцирование по  $\xi$ . Для идеального газа

$$PV = (\gamma - 1)E \quad (3)$$

и конкретного выражения (1) для  $q$  система (2)-(3) сводится в [1] к одному уравнению для определения  $V(\xi)$

$$2C^2 h^2 \left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right)^2 + (\gamma + 1)(V - V_0)^2 + 2V_0(V - V_0) = 0. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) имеет вид

$$\xi = -Ch \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} \arcsin \left( \gamma - (\gamma + 1) \frac{V}{V_0} \right).$$

На бесконечно сильной ударной волне с  $P_0 = 0$  достигается предельное сжатие  $V = V_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_0$ . В

этом случае  $\xi = \xi_1 = -\frac{Ch\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$  при  $V = V_1$  и  $\xi = \xi_0 = \frac{Ch\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$  при  $V = V_0$ . Т.о. ширина ударного слоя  $\Delta \xi$  и дистракция  $D$  сильной ударной волны в методе Неймана-Рихтмайера равны

$$\Delta \xi = \xi_0 - \xi_1 = Ch\pi \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}, \quad D_{HP} = \frac{\Delta \xi}{h} = C\pi \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}.$$

Обратим внимание, что, по существу, рассматривается дистракция, вызванная введением псевдовязкости в дифференциальной форме в дифференциальные законы сохранения. Однако в разностных методах погрешности аппроксимации, как правило, содержат члены того же порядка малости, что и  $q$ . Т.о. в [1] не была учтена зависимость дистракции от погрешностей аппроксимации. Кроме того, величина  $D$  находилась для бесконечно сильной ударной волны в идеаль-

ном газе, при которой достигается предельное сжатие. Исследование зависимости  $D$  от силы ударной волны проведено не было.

### 1. Эффективное значение дистракции в методе Неймана-Рихтмайера

В рамках подхода Неймана и Рихтмайера определим эффективное значение дистракции  $D^{\exists}$ . Вначале найдем значение  $\xi_M$ , при котором достигает максимума производная  $V'$ . Проинтегрируем (4)

$$4C^2 h^2 V V'' + 2(\gamma + 1)(V - V_0)V' + 2V_0 V' = 0. \quad (5)$$

Положив  $V''=0$  в (5), найдем значение  $V=V_M$ , при котором  $V'$  достигает максимума

$$V_M = \frac{1}{2}(V_0 + V_1).$$

При  $V=V_M$  из (4) следует максимальное значение производной

$$V'_M = \frac{(V_0 - V_1)}{2Ch} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}}.$$

Далее проводится прямая линия с наклоном  $V'_M$  до пересечения с горизонталями  $V=V_0$  и  $V=V_1$

$$V_0 = V_M + V'_M(\xi_0 - \xi_M), \quad V_1 = V_M + V'_M(\xi_1 - \xi_M).$$

Вычтем  $V_1$  из  $V_0$  и разделим полученное выражение на  $h$ . В результате получим эффективное значение дистракции

$$D^{\exists} = \frac{V_0 - V_1}{hV'_M}, \quad (6)$$

которое после подстановки  $V'_M$  принимает вид

$$D_{HP}^{\exists} = 2C \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}.$$

Таким образом, полученное в [1] значение дистракции разрыва DHP превышает  $D_{HP}^{\exists}$  в  $0.5\pi$  раз.

### 2. Метод определения дистракции

Изложим иной подход к определению дистракции  $D$ , основанный на рассмотрении разностных законов сохранения в дифференциальной форме [3]. По существу этот метод является развитием метода исследования дистракции, предложенного Нейманом-Рихтмайером. Рассмотрим разностную схему в дифференциальном представлении

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} = \omega_1, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = \omega_2, \quad \frac{\partial}{\partial t}(E + 0.5U^2) + \frac{\partial}{\partial m}(PU) = \omega_3. \quad (7)$$

Перейдем в (7) к автомодельной переменной  $\xi$ . В результате получим

$$WV' + U' + \omega'_1 = 0, \quad WU' - P' + \omega'_2 = 0. \quad (8)$$

$$W(E + 0.5U^2)' + (PU)' + \omega'_3 = 0. \quad (9)$$

В общем случае  $\omega_i$  имеют вид

$$\omega_i = \sum_{v=1}^3 \sum_{k=0, n=0}^{\infty} B_{kniv} \frac{\partial^{k+n} f_{iv}}{\partial t^k \partial m^n} \tau^{k-1} h^{n-1} \quad (k+n \geq 1),$$

где  $f_{iv}$  – функции, входящие в  $i$ -е уравнение. После перехода к дифференцированию по  $\xi$   $\omega_i$  принимает вид

$$\omega_i = \sum_{v=1}^3 \sum_{k=0, n=0}^{\infty} B_{kniv} (-W)^k \frac{d^{k+n} f_{iv}}{d\xi^{k+n}} \tau^{k-1} h^{n-1} \quad (k+n \geq 1).$$

Далее рассматривается либо первое, либо второе дифференциальное приближение. При этом важно, чтобы во всех уравнениях оставались члены одинакового порядка малости. Полученные уравнения интегрируются по  $\xi$

$$WV + U + \omega_1 = C_1, \quad WU - P + \omega_2 = C_2, \quad (10)$$

$$W(E + 0.5U^2) + (PU) + \omega_3 = C_3. \quad (11)$$

Постоянные интегрирования  $C_1, C_2, C_3$  находятся при  $\xi = +\infty$ , где  $V=V_0, P=P_0, U=U_0, E=E_0, q_0=0$ , а все производные равны нулю. К уравнениям (10), (11) добавляется уравнение состояния идеального газа (3), с помощью которого из (11) исключается  $E$ . Затем последовательно из (10) и полученного после исключения  $E$  уравнения энергии исключаются  $U$  и  $P$ . В результате получается уравнение, содержащее  $V$  и все величины  $\omega_i$ , которые содержат все производные.

На следующем этапе с помощью системы (8), (9) вместе с уравнением состояния все производные выражаются через  $V'$ . Если требуется выразить все вторые производные через  $V''$ , то система дифференцируется по  $\xi$ , в результате чего из (8), (9) следуют уравнения

$$WV'' + U'' + \omega_1'' = 0, \quad WU'' - P'' + \omega_2'' = 0,$$

$$W(E + 0.5U^2)'' + (PU)'' + \omega_3'' = 0.$$

В результате описанной процедуры получается обыкновенное дифференциальное уравнение относительно  $V$ . Решение этого уравнения  $V(\xi)$  принимает значения  $V=V_1$  при  $\xi=\xi_1$  и  $V=V_0$  при  $\xi=\xi_0$ . Величина

$$D = \frac{\xi_0 - \xi_1}{h}$$

и является дистракцией. Каждая разностная схема характеризуется своим значением  $D$  для конкретных решений.

### 3. Дистракция разрыва в методе Неймана-Рихтмайера

Рассмотрим уточненную дистракцию разрыва в методе Неймана-Рихтмайера. Для этого запишем разностные уравнения в дифференциальной форме

$$\frac{V_{i+0.5}^{n+1} - V_{i+0.5}^n}{\tau} - \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{h} = \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial m} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 V}{\partial t^3} - \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3 U}{\partial m^3} + O(\tau^3, h^3) = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{(P+q)_{i+0.5}^n - (P+q)_{i-0.5}^n}{h} = \\ = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(P+q)}{\partial m} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3(P+q)}{\partial m^3} + O(\tau^3, h^3) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_{i+0.5}^{n+1} - E_{i+0.5}^n}{\tau} + \left( \frac{P_{i+0.5}^{n+1} + P_{i+0.5}^n}{2} + q_{i+0.5}^{n+0.5} \right) \frac{V_{i+0.5}^{n+1} - V_{i+0.5}^n}{\tau} = \\ = \frac{\partial E}{\partial t} + (P+q) \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\tau^2}{24} \left( \frac{\partial^3 E}{\partial t^3} + (P+q) \frac{\partial^3 V}{\partial t^3} \right) + O(\tau^3, h^3) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В уравнениях (12)-(14) выписаны все члены первого и второго порядков малости, поскольку  $q \sim h^2$ . В случае стационарной ударной волны перейдем к безразмерной переменной  $\xi$ . В этом случае уравнения (12)-(14), (1) принимают вид

$$WV' + U' + \frac{1}{2} \tau W^2 V'' + \frac{\tau^2}{6} W^3 V''' + \frac{h^2}{24} U'''' = O(\tau^3, h^3), \quad (15)$$

$$WU' - (P+q)' - \frac{1}{2} \tau W^2 U'' + \frac{\tau^2 W^3}{6} U''' - \frac{h^2}{24} P'''' = O(\tau^3, h^3), \quad (16)$$

$$E' + (P+q)V' - \frac{\tau^2 W^2}{12} (P''V' + P'V'') = O(\tau^3), \quad (17)$$

$$q = \frac{k^2 h^2 W^2}{V} (V')^2. \quad (18)$$

Из (15), (16) исключим  $U'$ ,  $U''$ ,  $U'''$ . Для этого продифференцируем (15) и выразим  $U''$ ,  $U'''$  через  $V''$ ,  $V'''$

$$U'' = -WV'' - \frac{1}{2} \tau W^2 V''' + O(\tau^2, h^2),$$

$$U''' = -WV''' + O(\tau^2, h^2).$$

Подставив  $U''$ ,  $U'''$  в (15), (16), получим

$$WV' + U' + \frac{1}{2} \tau W^2 V'' + \frac{1}{6} \tau^2 W^3 V''' - \frac{1}{24} h^2 W V'''' = O(\tau^3, h^3), \quad (19)$$

$$WU' - (P+q)' + \frac{1}{2} \tau W^3 V'' + \frac{1}{4} \tau^2 W^4 V''' - \frac{1}{6} \tau^2 W^4 V'''' - \frac{1}{24} h^2 P'''' = O(\tau^3, h^3). \quad (20)$$

Умножим (19) на  $W$  и вычтем из него (20)

$$W^2 V' + (P+q)' + \frac{1}{12} \tau^2 W^4 V''' - \frac{1}{24} h^2 W^2 V'''' + \frac{1}{24} h^2 P'''' = O(\tau^3, h^3). \quad (21)$$

Из уравнения (21) выразим  $P''$

$$P'' = -W^2 V' + O(\tau^2, h^2). \quad (22)$$

Продифференцировав (22), получим

$$P''' = -W^2 V'' + O(\tau^2, h^2), \quad P'''' = -W^2 V''' + O(\tau^2, h^2). \quad (23)$$

Подставив (22) и (23) в (17) и (21), получим

$$E' + (P+q)V' = O(\tau^3, h^3), \quad (24)$$

$$W^2 V' + (P+q)' + \frac{1}{12} \tau^2 W^4 V''' - \frac{1}{12} h^2 W^2 V''' = O(\tau^3, h^3). \quad (25)$$

Проинтегрируем (25) и отбросим члены третьего порядка малости

$$W^2 V + P + q - \frac{1}{12} h^2 W^2 (1 - \kappa^2) V'' = W^2 V_0 + P_0. \quad (26)$$

Введем обозначение

$$A = \frac{1}{12} h^2 W^2 (1 - \kappa^2), \quad (27)$$

где  $\kappa = \frac{\tau W}{h}$ . Выразим  $(P+q)$  из (26), подставим в (24) и отбросим члены третьего порядка малости

$$E' - W^2 V V' + A V' V'' + (P_0 + W^2 V_0) V' = 0. \quad (28)$$

Проинтегрируем это уравнение

$$E - \frac{W^2 V^2}{2} + \frac{A(V')^2}{2} - E_0 + (P_0 + W^2 V_0)(V - V_0) + \frac{1}{2} W^2 V_0^2 = 0. \quad (29)$$

Подставим в (29) уравнение состояния идеального газа (3) и в полученное уравнение подставим  $P$ , выраженное из (26)

$$-Vq + A V V'' + \frac{\gamma-1}{2} A (V')^2 + (V - V_0) \left( \gamma P_0 - \frac{\gamma+1}{2} W^2 (V - V_0) - W^2 V_0 \right) = 0. \quad (30)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Рассмотрим случай ударной волны произвольной интенсивности. Поскольку состояние перед разрывом  $P_0$ ,  $V_0$ ,  $E_0$ ,  $U_0$ ,  $a_0$  и скорость разрыва  $W$  заданы, то из условий на поверхности сильного разрыва

$$P_1 - P_0 + W^2 (V_1 - V_0) = 0,$$

$$E_1 - E_0 + P_0 (V_1 - V_0) - 0,5 W^2 (V_1 - V_0)^2 = 0$$

и уравнения состояния (3) выразим  $V_1$  через  $W$ ,  $a_0^2 = \frac{\gamma P_0}{V_0}$  и  $V_0$

$$V_1 = V_0 \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{a_0^2}{W^2} \right). \quad (31)$$

С помощью (18), (27) и (31) преобразуем (30) к виду

$$2V'' + \frac{n(V')^2}{V} = \frac{12(\gamma+1)(V - V_0)(V - V_1)}{h^2(1 - \kappa^2)V}, \quad (32)$$

где

$$n = \gamma - 1 - \frac{24C^2}{1 - \kappa^2}. \quad (33)$$

Введем новую переменную  $Y = (V')^2$  и преобразуем (32) к линейному ОДУ

$$\frac{dY}{dV} + \frac{n}{V} Y = \frac{12(\gamma+1)(V - V_0)(V - V_1)}{h^2(1 - \kappa^2)V}.$$

Рассмотрим решение этого уравнения

$$Y = V^{-n} \left( K + \frac{12(\gamma+1)V^n}{h^2(1-\kappa^2)(n+2)} \left( (V-V_0)(V-V_1) - \frac{V_0+V_1}{n+1}V + \frac{2}{n}V_0V_1 \right) \right). \quad (34)$$

Постоянную интегрирования  $K$  найдем в состоянии перед разрывом  $V=V_0$ ,  $Y=0$

$$K = \frac{12(\gamma+1)V_0^{n+1}}{h^2(1-\kappa^2)(n+2)(n+1)} \left( V_0 - \frac{n+2}{n}V_1 \right).$$

После подстановки  $K$  в (34) решение принимает вид

$$(V')^2 = \frac{12(\gamma+1)}{h^2(1-\kappa^2)} \left( \frac{V^2}{n+2} - \frac{(V_0+V_1)V}{n+1} + \frac{V_0V_1}{n} - \left( \frac{V}{V_0} \right)^{-n} \left( \frac{V_0^2}{n+2} - \frac{(V_0+V_1)V_0}{n+1} + \frac{V_0V_1}{n} \right) \right). \quad (35)$$

Найдем уточненное выражение эффективной дистракции ударной волны. В (32) приравняем нулю  $V''$ . В результате получим выражение для  $V'_M$

$$(V'_M)^2 = \frac{12(\gamma+1)(V_M - V_0)(V_M - V_1)}{nh^2}. \quad (36)$$

Приравняв (36) и (35), получим уравнение для определения  $V_M$ . Рассмотрим внимательнее  $n$ .

При  $C \approx 2$  и  $0 \leq \kappa \leq 1$  значение  $n$  лежит в промежутке  $-\infty < n < -100$ . Так как  $\frac{V_M}{V_0} < 1$ , то  $\left( \frac{V_M}{V_0} \right)^{-n} \approx 0$  и

с учетом этого обстоятельства получим приближенное уравнение для определения  $V_M$ , из которого следует

$$V_M \approx \frac{V_0 + V_1}{2} \frac{n+2}{n+1}.$$

Учитывая реальные значения  $n \leq -100$ , сделаем еще одно упрощение и будем считать

$$V_M = 0.5(V_0 + V_1). \quad (37)$$

Подставив теперь  $V_M$  (37) и  $n$  (33) в (36), получим выражение для  $V'_M$

$$V'_M = \frac{V_0 - V_1}{h} \sqrt{\frac{3(\gamma+1)}{24C^2 - (\gamma-1)(1+\kappa^2)}}.$$

Подставив  $V'_M$  в (6), получим уточненное значение эффективной дистракции. Воспользовавшись сделанным в п.1 соотношением  $D_{HP} = 0.5\pi D_{HP}^3$ , получим уточненное выражение  $D_{HP}$

$$D_{HP} = \pi C \sqrt{\frac{2}{\gamma+1} + \frac{2\kappa^2}{(\gamma+1)(1-\kappa^2)} - \frac{(\gamma-1)}{12C^2(\gamma+1)}}. \quad (38)$$

#### 4. Немонотонность в методе Неймана-Рихмайера и поправка к $D_{HP}$

Из (35) следует, что при  $V=V_1$  и  $(V_1/V_0)^{-n} \approx 0$

$$(V_1')^2 \approx \frac{12(\gamma+1)V_1 \left( V_0 - V_1 + \frac{2}{n}V_0 \right)}{h^2(1-\kappa^2)(n+1)(n+2)} \neq 0. \quad (39)$$



Это объясняет наблюдающуюся в расчетах немонотонность профиля  $V(\xi)$  в методе Неймана–Рихтмайера.

Из (39) следует, что  $V_1'$ , а значит и немонотонность  $V(\xi)$  при  $V=V_1$  в методе Неймана–Рихтмайера возрастает при  $\kappa^2 \rightarrow 1$  и стремится к постоянному значению при  $\kappa^2 \rightarrow 0$ .

Оценим значение  $V_*$ , при котором  $V'=0$ . Разность  $V_1-V_*$  и есть амплитуда первой осцилляции. Из (35) при  $V'=0$  и  $(V_1/V_0)^{-n} \approx 0$  следует

$$V_*^2 - (V_0 + V_1)V_* \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + V_0V_1 \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$V_* = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) (V_0 + V_1) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 (V_0 + V_1)^2 - V_0V_1 \left(1 + \frac{2}{n}\right)}. \quad (40)$$

Первый корень со знаком плюс не представляет интереса, т.к. дает значение  $V_* \approx V_0$ . Второй корень дает значение  $V_* < V_1$ . Амплитуда осцилляции равна  $\Delta V = V_1 - V_*$ .

Оценим теперь область  $2(\xi_1 - \xi_*)$ , занимаемую этой осцилляцией. Аппроксимируем зависимость  $V(\xi)$  параболой

$$V = V_* + a(\xi - \xi_*)^2.$$

При  $\xi = \xi_*$  производная  $V' = 0$ , а при  $\xi = \xi_1$ ,  $V = V_1$  и  $V' = V_1'$ . Т.о. получаем поправку к  $D_{HP}^{\exists}$  в виде

$$\Delta D_{HP} = \frac{4(V_1 - V_*)}{hV_1'}. \quad (41)$$

Значения  $V_*$  и  $V_1'$  вычисляются по формулам (39) и (40).

Для  $\gamma=2$ ,  $C=1.5$ ,  $\kappa=1/4$  в случае бесконечно сильной ударной волны получаем из (38)-(41)

$$D_{HP}^{\exists} = 2.51, \quad V_1' = 0.0516V_0/h, \quad V_* = 0.983V_1, \quad \Delta D_{HP} = 0.45.$$

Т.о. полное значение уточненной эффективной дистракции сильной ударной волны в методе Неймана-Рихтмайера равно

$$D_{HP} = 0.5\pi D_{HP}^{\exists} + \Delta D_{HP} \approx 4.5.$$

Полученные выше результаты качественно согласуются с выводами, сделанными в [4], согласно которым отличие от нуля первой и второй производных  $V_1'$ ,  $V_1''$  при  $V=V_1$  (и аналогично  $P_1'$ ,  $P_1''$ ,  $U_1'$ ,  $U_1''$ ) означает разрыв при  $V=V_1$  погрешностей аппроксимации на точных решениях для всех трех законов сохранения, что является источником осцилляций на тыльной стороне ударного слоя.

На практике дистракция определяется с точностью до одного сеточного интервала. Поэтому выражение (40) можно заменить более простым приближенным уравнением. Поскольку  $|n|$  велико, то можно считать, что

$$\frac{1}{n} \approx \frac{1}{n+1}, \quad \left(1 + \frac{1}{h+1}\right)^2 \approx 1 + \frac{2}{h+1}.$$

Используя эти приближения, запишем (40) в виде

$$V_* = V_1 \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}. \quad (42)$$

Следовательно, амплитуда осцилляции равна

$$\Delta V = V_1 - V_* = -\frac{V_1}{n+1}. \quad (43)$$

При использованных выше значениях  $\gamma$ ,  $k$  и  $\kappa$  вычисление  $V_*$  и  $\Delta D_{HP}$  с помощью (42), (43) дает

$$V_* = 0.982V_1, \quad \Delta D_{HP} = 0.46,$$

что мало отличается от значений, полученных по сложным формулам.

### 5. Дистракция в методах Лакса, Годунова, Куропатенко

Аналогичным образом исследуется дистракция в методах Лакса [5], Годунова [6] и Куропатенко [7]. Во всех этих методах дистракция сильного разрыва бесконечна

$$D = \infty.$$

В методе Лакса эффективное значение дистракции разрыва имеет вид

$$D_{\mathcal{L}}^{\mathcal{E}} = \frac{2(1-\kappa^2)(\sqrt{V_0} + \sqrt{V_1})}{(\gamma+1)\kappa(\sqrt{V_0} - \sqrt{V_1})}. \quad (44)$$

Из (44) видно, что при  $\kappa \rightarrow 1$  эффективное значение  $D_{\mathcal{L}}^{\mathcal{E}} \rightarrow 0$ , а при  $\kappa \rightarrow 0$   $D_{\mathcal{L}}^{\mathcal{E}} \rightarrow \infty$ . В методе Годунова и методе Куропатенко

$$D^{\mathcal{E}} = \frac{2}{(\gamma+1)}(1-\kappa) \left( \frac{\sqrt{V_0} + \sqrt{V_1}}{\sqrt{V_0} - \sqrt{V_1}} \right). \quad (45)$$

Из (44) и (45) видно, что при уменьшении амплитуды ударной волны  $V_1 \rightarrow V_0$  дистракция возрастает. Это объясняет сильное «размазывание» слабых ударных волн, наблюдаемое в расчетах.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Neumann J., Richtmayer R. A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks //J. Appl. Phys., 1950, v.21, №3, p.232-237.
2. Becker R. Stosswelle und Detonation //Z. Phys., 1922, v.8, p.43-52.
3. Куропатенко В.Ф. О полной консервативности разностных законов сохранения. //Вопросы атомной науки и техники. Серия: Численные методы решения задач математической физики. Вып. 3(11), 1982, с. 3-5.
4. Рождественский Б.Л., Яненко Н.К. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1968, 591с.
5. Lax P.D. Weak solution of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations //Comm. Pure and Appl. Math., 1954, v.7, p.159-193.
6. Годунов С.К. Разностный метод счета разрывных решений уравнений газодинамики //Матем. сб., 1959, №47(89), вып.3, с.271-306.
7. Куропатенко В.Ф. Метод расчета ударных волн //ДАН СССР, 1960, в.3, №4, с.771.