УДК 532.5

АНАЛИЗ ИНВАРИАНТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко

Проведен анализ инвариантности относительно преобразования Галилея математической модели «замороженной» газовзвеси. Было показано, что уравнение полной удельной энергии газовой фазы в математической модели «замороженной» газовзвеси не является инвариантным относительно преобразования Галилея. Это приводит к появлению в уравнении полной удельной энергии фиктивного источникового члена, который определяет рост энтропии. Дополнительный рост энтропии ведет к нарушению второго закона термодинамики. В данной работе была предложена модификация уравнения полной удельной энергии газовой фазы. Модификация заключалась в том, что из правой части уравнения сохранения полной удельной энергии вычитается работа межфазных сил. Анализ полученного уравнения показал, что уравнение полной удельной энергии газовой фазы становится инвариантным относительно преобразования Галилея, а уравнение для производства энтропии не противоречит второму закону термодинамики.

Ключевые слова: математическая модель, инвариантность, многокомпонентная смесь.

В связи с развитием современной вычислительной техники резко возросла роль математического моделирования физических процессов, используемых в науке и технике. Более того, есть такие проблемы, когда математическое моделирование является единственным средством предварительного изучения явлений. Поэтому с особой остротой встает проблема адекватности математических моделей тем физическим процессам, которые они пытаются описывать. В природе практически нет чистых веществ, поэтому активно развиваются математические модели многокомпонентных сред [1, 2]. Для верификации расчетов, с одной стороны, используют известные экспериментальные данные, а с другой стороны, при анализе проведенных измерений используют математические модели [3, 4]. Очень важно, чтобы условия проведения расчетов и экспериментов совпадали, а математическая модель была адекватна изучаемому физическому процессу. В настоящей статье на примере анализа математической модели замороженной газовзвеси [5, 6] покажем к чему может привести ситуация, когда расчеты и эксперимент проведены в разных системах координат.

При решении поставленной задачи предполагалось, что частицы твердой фазы неподвижны и несжимаемы. Это означает, что вместо газовзвеси фактически рассматривается заполненная газом недеформируемая решетка. Твердые частицы имитируют ее узлы, а связи между узлами решетки не оказывают влияния на газодинамическое течение, т.е. используется модель «замороженной» газовзвеси, представленная в работах [5, 6] при изучении ослабления ударных волн. Поскольку частицы неподвижны и несжимаемы, то их объёмная концентрация и, следовательно, объёмная концентрация газа постоянны.

С учётом сказанного выше система уравнений из [5, 6], описывающая в одномерном случае течение газа через решётку, имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} - F, \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uE)}{\partial x} + \frac{\partial(Pu)}{\partial x} = -Q. \tag{3}$$

Здесь P – парциальное давление, ρ – парциальная плотность, u – скорость, t – время, F – силы межфазного взаимодействия, E – удельная полная энергия газа; Q – интенсивность теплообмена между газом и частицами. Функция F зависит от разности скоростей газа и частиц, функция Q – от разности температур газа и частиц. Функции F и Q не изменяются при переходе в новую систему координат.

Проведем анализ инвариантности системы уравнений (1) – (3) относительно преобразования Галилея. С этой целью перейдем в новую систему координат, которая движется с постоянной скоростью D относительно старой системы координат. Скорость в новой системе координат будет равна

$$u_H = u + D, \tag{4}$$

координата определяется из уравнения

$$x_H = x + Dt. \tag{5}$$

Производные по координате и времени определяются следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_H}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_H}\right) D. \tag{6}$$

После перехода в движущуюся систему координат значок Н будем опускать. Следовательно, уравнение неразрывности газовой фазы (1) с учетом (4) – (6) принимает следующий вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} D + \frac{\partial(\rho(u - D)}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

который после сокращения членов с противоположными знаками совпадает с (1).

Запишем теперь уравнение сохранения импульса газовой фазы (2) в новой системе координат

$$\frac{\partial \rho(u-D)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(u-D)}{\partial x} D + \frac{\partial \rho(u-D)^2}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + F = 0.$$

После простых преобразований оно принимает вид

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + F = \omega_1(D), \tag{8}$$

где

$$\omega_1(D) = D\left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} - 2\frac{\partial \rho u}{\partial x}\right) + D^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x}\right). \tag{9}$$

Подставив (1) в (9) и сократив подобные члены, получим, что

$$\omega_1(D) = 0, \tag{10}$$

и, следовательно, уравнение (8) совпадает с уравнением (2).

И, наконец, перейдём в новую систему координат в уравнении (3) для удельной энергии газовой фазы. Учитывая, что

$$E = \varepsilon + \frac{u^2}{2},$$

где ε – удельная внутренняя энергия, запишем уравнение (3) в новой системе координат

$$\frac{\partial\rho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}(u-D)^2\right)}{\partial t}+\frac{\partial\rho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}(u-D)^2\right)}{\partial x}D+\frac{\partial\rho(u-D)\left(\varepsilon+\frac{1}{2}(u-D)^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial P(u-D)}{\partial x}+Q=0.$$

Раскрыв скобки и сгруппировав члены, получим уравнение для удельной полной энергии газовой фазы в новой системе координат, распространяющейся с постоянной скоростью D

$$\frac{\partial\rho\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\rho u\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)}{\partial x}+\frac{\partial Pu}{\partial x}+Q=\omega_2, \tag{11}$$

где

$$\omega_2=-DF.$$

Как следует из уравнений (8), (10) и (11), для модели замороженной газовзвеси из [5, 6] уравнение неразрывности газовой фазы и уравнение сохранения импульса газовой фазы являются инвариантными относительно преобразования Галилея, а уравнение энергии (3) не является инвариантным.

Оценим последствия неинвариантности уравнения энергии. В уравнении (11) исключим кинетическую энергию с помощью уравнения (2). Для этого умножим (2) на u и вычтем из (11), затем умножим (1) на ε и вычтем из полученного уравнения. Следствием этих преобразований является уравнение для внутренней энергии

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}-\frac{P}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)+\frac{Q}{\rho}=\left(\frac{u-D}{\rho}\right)F. \tag{12}$$

Перейдём к субстанциональным производным, заменим плотность удельным объёмом $V=\left(\frac{1}{\rho}\right)$ и сравним полученное уравнение с уравнением для удельной внутренней энергии, как функции энтропии и удельного объёма

$$\frac{d\varepsilon}{dt}+P\frac{dV}{dt}=T\frac{dS}{dt}. \tag{13}$$

В результате из (12) и (13) получим уравнение производства энтропии газа

$$T\frac{dS}{dt}=\frac{1}{\rho}(F(u-D)-Q).$$

Если разделить энтропию на две части

$$S=S_{PH}+S_G,$$

где S_{PH} – определяется «физикой» модели, а S_G определяется Галилеевой неинвариантностью, то мы получим уравнение производства энтропии S_G

$$T\frac{dS_G}{dt}=\frac{F}{\rho}(u-D), \tag{14}$$

возникшее исключительно из-за того, что авторы модели [5, 6] пренебрегли фундаментальным принципом механики.

Рассмотрим возможность получения уравнения полной удельной энергии газовой фазы инвариантное относительно преобразования Галилея. С этой целью из правой части уравнения полной удельной энергии газовой фазы (3) вычитаем работу сил межфазного взаимодействия Fu, получим

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uE)}{\partial x}+\frac{\partial(Pu)}{\partial x}=-Q-Fu, \tag{15}$$

Переходя к новой системе координат, которая движется с постоянной скоростью D, по формулам (4) – (6), получим уравнение полной удельной энергии газовой фазы в новой системе координат

$$\frac{\partial(\rho(\varepsilon+u^2/2))}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u(\varepsilon+u^2/2))}{\partial x}+\frac{\partial Pu}{\partial x}=-Q-Fu. \tag{16}$$

Из сравнения (15) и (16) видно, что уравнение полной удельной энергии газовой фазы (15) является инвариантным относительно преобразования Галилея.

Получим выражение для удельной внутренней энергии газовой фазы. С этой целью, как и ранее, исключим кинетическую энергию с помощью уравнения (2). Для этого умножим (2) на u и вычтем из уравнения (16). Далее, умножим (1) на ε и вычтем из (16). В результате получаем уравнение для удельной внутренней энергии газовой фазы в вид

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}-\frac{p}{\rho^2}(\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x})=-Q/\rho. \tag{17}$$

Как и ранее, переходя к субстанциональным производным и заменяя плотность удельным объемом $V=(1/\rho)$, получим уравнение для удельной внутренней энергии газовой фазы, как функции энтропии и удельного объема (13). Вычитая из равенства (17) равенство (13), получим уравнение производства энтропии газовой фазы

$$T\frac{ds}{dt}=-Q/\rho. \tag{18}$$

Уравнение (18) согласуется со вторым законом термодинамики. Видим, что производство энтропии газовой фазы определяет только межфазным теплообменом.

К сожалению, принцип инвариантности к преобразованию Галилея не выполняется в ряде моделей многокомпонентных сред, публикуемых в журналах. Такие модели не способны прогнозировать результаты тех физических процессов, для моделирования которых они предназначены.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №10-01-00032.

Литература

1. Нигматулин, Р.И. Основы механики гетерогенных сред / Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
2. Куропатенко, В.Ф. Новые модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко // ИФЖ. – 2011. – Т. 84, № 1. – С. 74–92.
3. Шестаков, А.А. Динамические измерения как задача оптимального управления / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Е.В. Захарова // Обозрение прикл. и пром. математики. – 2009. – Т.16, №4. – С. 732–733.
4. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.
5. Кругликов, Б.С. Ослабление воздушных ударных волн экранирующими решетками / Б.С. Кругликов, А.Г. Кутушев // ФГВ. – 1988. – № 1. – С. 115–117.
6. Кругликов, Б.С. Ослабление воздушных ударных волн слоями запыленного газа и решетками / Б.С. Кругликов, А.Г. Кутушев // ПМТФ. – 1988. – № 1. С. 51–57.

Юрий Михайлович Ковалев, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной механики сплошных сред, Южно-Уральский государственный университет (НИУ), (г. Челябинск, Российская Федерация), kov@mail.ru.

Валентин Федорович Куропатенко, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Российского федерального ядерного центра – Всероссийского научно-исследовательского института технической физики им. академика Е.И. Забабахина, (г. Снежинск, Российская Федерация), v.f.kuropatenko@rambler.ru.

MSC 76T25

Analysis of the Invariance Under the Galilean Transformation of Some Mathematical Models of Multicomponent Media

Yu.M. Kovalev, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)***,***
V.F. Kuropatenko, Russian Research Institute of Technical Physics, Academician E.I. Zababakhin (Snezhinsk, Russian Federation)

The analysis of the invariance under the Galilean transformation of the mathematical model of «frozen» gas suspension is done. It was shown that the equation of the total energy density of the gas phase in the model of «frozen» gas suspension was not invariant under Galilean transformations. This leads to appearance of the total energy density equation of the fictitious source term, which determines the growth of entropy. An additional increase of entropy leads to a violation of the second law of thermodynamics. In this paper a modification of the equation of the total energy density of the gas phase was proposed. The modification consisted in the fact that the right-hand side of the equation of conservation of total energy density was subtracted the work of interfacial forces. The analysis of this equation showed that the equation of the total energy density of the gas phase was invariant under Galilean transformations, and the equation for the entropy production didn't contradict the second law of thermodynamics.

Keywords: mathematical model, invariance, multi-component mixture.

References

1. Nigmatulin R.I. *Fundamentals of Mechanics of Heterogeneous Media.* Moscow, Nauka, 1978. – 336 p.
2. Kuropatenko V.F. New Models of Continuum Mechanics. *Ukrainian Journal of Physics,* 2011, vol. 84, no. 1, pp. 74–92.
3. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Zakharova E.V. Dynamic Measurements as an Optimal Control. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki – Review of Industrial and Applied Mathematics*, 2009, vol. 16, no. 4, pp. 732–733.
4. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of Optimal Measurement [Chislennoe reshenie zadachi optimal'nogo izmerenija]. *Automatics and Telemechanics*, 2012, no. 1, pp. 107–115.
5. Kruglikov B.S., Kutushev A.G. Attenuation of air Shock Waves Louvre. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 1988, no. 1, pp. 115–117.
6. Kruglikov B.S., Kutushev A.G. Attenuation of air shock layers of dust and gas grills. *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1988, no. 1, pp. 51–57.

Поступила в редакцию 20 июня 2012 г.