

О СИЛЬНЫХ РАЗРЫВАХ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ¹

Рассматриваются условия на фронте ударной волны в двухкомпонентной смеси. Показано, что в смеси близких по физическим свойствам компонентов кластерное взаимодействие не существенно, а в смеси компонентов с сильно разными свойствами сила кластерного взаимодействия, действующая по нормали к поверхности разрыва, сравнима с давлением.

Ключевые слова: компонент, смесь, ударная волна, разрыв, взаимодействие, законы сохранения.

Необходимость моделирования поведения многокомпонентных сред (МКС) возникает во многих областях человеческой деятельности [1]. Это порождает возникновение различных моделей МКС, предназначенных для моделирования ее поведения при внешних воздействиях. Вообще говоря, разные компоненты МКС различаются теплоемкостью, скоростью звука, сжимаемостью, модулем сдвига, коэффициентом вязкости, теплопроводности и другими физическими характеристиками. Поэтому при внешних воздействиях МКС, как правило, приходят в неравновесное состояние с разными давлениями, температурами и скоростями. Стремление к повышению точности прогнозирования процессов в МКС с помощью учета этих неравновесностей и описания релаксационных процессов приводит к резкому усложнению моделей. При фазовых переходах в отдельных компонентах существенно меняется характер взаимодействия компонентов, что вынуждает рассматривать множество свойств, проявляющихся при парных взаимодействиях.

В настоящее время для моделирования поведения МКС применяются различные модели — от очень простых до самых сложных. Чаще всего простота модели достигается благодаря упрощающим гипотезам. Так, например, воздух (смесь азота, кислорода и других газов) чаще всего рассматривается как одно вещество со своим уравнением состояния (УРС). В этом случае модель МКС является наиболее простой — это классические уравнения газовой динамики. Следующими по сложности являются модели, в которых компоненты двигаются с

одной и той же скоростью и имеют одинаковые температуру и давление. При этом для описания перемешивания компонентов используется уравнение диффузии (модели Дарси, Баклея — Леверетта и др. [2]). Применение уравнений диффузии для описания движения компонентов относительно друг друга противоречит предположению о равенстве их скоростей.

Наиболее полными и перспективными являются модели, основанные на гипотезе взаимопроницающих взаимодействующих континуумов (ВВК) [1–6]. В классе этих моделей есть более простые и более сложные. Сложность модели обратно пропорциональна числу сделанных упрощений. Следует обращать внимание на то, чтобы при переходе от общей модели к частной не возникало физических противоречий, как в диффузионных моделях.

В моделях ВВК каждый i -й компонент характеризуется набором физических величин P_i , ρ_i , E_i , \mathbf{U}_i , S_i и др., набором парциальных величин $\alpha_i P_i$, $\alpha_i \rho_i$, $\eta_i E_i$, $\eta_i \mathbf{U}_i$, $\eta_i S_i$ и др., объемной α_i и массовой η_i концентрациями. Каждый компонент сохраняет свои физические свойства и имеет уравнение состояния. При отсутствии химических реакций и теплообмена между частицами i -го компонента законы сохранения массы, количества движения и энергии имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i) + \nabla(\alpha_i \rho_i \mathbf{U}_i) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \mathbf{U}_i) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_i \rho_i \mathbf{U}_i U_{ik}) + \nabla \Pi_i - \mathbf{R}_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathbf{F}_{ik}) = 0; \quad (2)$$

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ. Гранты 10-01-00032, 10-01-96001.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \varepsilon_i) + \nabla(\mathbf{U}_i(\Pi_i + \alpha_i \rho_i \varepsilon_i)) - W_i - \mathbf{R}_i \mathbf{U}_i + \\ + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathbf{F}_{ik} \mathbf{U}_i) + \nabla \mathbf{Q}_i = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Они дополняются уравнением

$$\varepsilon_i = E_i + 0,5 \mathbf{U}_i^2, \quad (4)$$

связывающим удельную полную энергию ε_i с удельной внутренней энергией E_i и удельной кинетической энергией $0,5 \mathbf{U}_i^2$, и уравнением

$$\Pi_i = \alpha_i P_i, \quad (5)$$

связывающим физическое давление P_i с парциальным давлением Π_i . Термодинамические характеристики каждого компонента связаны уравнением состояния

$$P_i = P_i(\rho_i E_i); \quad T_i = T_i(\rho_i E_i), \quad (6)$$

Парные взаимодействия компонентов определяются функциями \mathbf{R}_i и W_i , которые имеют вид [7–8]

$$\mathbf{R}_i = \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{a_{ij}}{\tau_{ij}} (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_i), \quad (7)$$

$$W_i = \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j \left(\frac{b_{ij}}{\tau_{ij}^P} (P_j - P_i) - \frac{c_{ij}}{\tau_{ij}^T} (T_j - T_i) \right). \quad (8)$$

Величины a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , τ_{ij}^U , τ_{ij}^P , τ_{ij}^T учитывают особенности взаимодействия i -го и j -го компонентов: размер и форму частиц, адгезионные свойства, шероховатость поверхностей, физические свойства, фазовые состояния и т. д. Поскольку эти функции удовлетворяют требованиям Онзагера [2], т. е. инвариантны относительно смены порядка индексов ij на ji , то они удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N W_i = 0.$$

Тензор \mathbf{F} и поток энергии \mathbf{Q} , входящие в уравнения (2)–(3), определяют кластерное взаимодействие i -го компонента со смесью в целом. Они имеют вид [7]

$$\mathbf{F}_{ik} = -0,5 \alpha_i \rho_i (\mathbf{U} - \mathbf{U}_i)(U_k - U_{ik}), \quad (9)$$

$$\mathbf{Q}_i = 0,5 \alpha_i (\mathbf{U} - \mathbf{U}_i)(P_i + \rho_i E_i). \quad (10)$$

Система $11N$ независимых уравнений (1)–(10) содержит $12N$ искомым функций: P_i , ρ_i , E_i , T_i , α_i , ε_i , $\dot{\mathbf{U}}_i$, \mathbf{U}_i , \mathbf{R}_i , F_i , W_i , \mathbf{Q}_i . Для замыкания системы уравнений нужно добавить N уравнений для объемной концентрации α_i . Эти уравнения

должны быть независимыми от остальных уравнений системы (1)–(10).

В качестве уравнения, содержащего скорость изменения объемной концентрации, остановимся на обоснованном в [9] уравнении

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \mathbf{U} \nabla \alpha_i + \\ + \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j \left(\frac{b_{ij}}{\tau_{ij}^P} (P_j - P_i) - \frac{c_{ij}}{\tau_{ij}^T} (T_j - T_i) \right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Это уравнение имеет два достоинства. Оно инвариантно к преобразованию Галилея и удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1. \quad (12)$$

Сильный разрыв — это поверхность, на которой все характеристики компонентов и смеси изменяются скачком. Из экспериментов с ударными волнами известно, что для нормальных уравнений состояния (УРС) сильный разрыв не расщепляется, т. е. $D_i = D = \frac{dx}{dt}$.

Независимо от состояния компонентов перед разрывом их состояние за разрывом всегда неравновесно: $U_i \neq U$, $P_i \neq P$, $T_i \neq T$. На поверхности сильного разрыва (за ним) начинаются релаксационные процессы установления равновесия: $U_i \rightarrow U$, $P_i \rightarrow P$, $T_i \rightarrow T$. Эти процессы протекают в области конечного размера Δx , которая трактуется как ширина фронта ударной волны. На поверхности сильного разрыва касательная составляющая скорости непрерывна. Направим ось Ox по нормали к поверхности разрыва. В одномерном плоском случае получим уравнения i -го компонента в виде

$$\frac{\partial \alpha_i \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_i \rho_i U_i}{\partial x} = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \alpha_i \rho_i U_i}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_i \rho_i U_i^2}{\partial x} + \frac{\partial (\alpha_i P_i + F_i)}{\partial x} - R_i = 0; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_i \rho_i \varepsilon_i}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_i \rho_i \varepsilon_i U_i}{\partial x} + \\ + \frac{\partial \alpha_i (P_i + F_i) U_i}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i \mathbf{Q}_i}{\partial x} - W_i - A_i = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} + W_i = 0. \quad (16)$$

Следуя стандартной процедуре перехода от дифференциальных уравнений (13)–(16) к уравнениям на разрыве, получим уравнения на поверхности сильного разрыва:

$$\alpha_{i+}\rho_{i+}(D-U_{i+})-\alpha_{i-}\rho_{i-}(D-U_{i-})=0. \quad (17)$$

$$\alpha_{i-}\rho_{i-}(D-U_{i-})(U_{i+}-U_{i-})-\alpha_{i+}(P_{i+}+F_{i+})+\alpha_{i-}(P_{i-}+F_{i-})=0. \quad (18)$$

$$\alpha_{i-}\rho_{i-}(D-U_{i-})(\varepsilon_{i+}-\varepsilon_{i-})-\alpha_{i+}U_{i+}(P_{i+}+F_{i+})-\alpha_{i+}Q_{i+}+\alpha_{i-}U_{i-}(P_{i-}+F_{i-})+\alpha_{i-}Q_{i-}=0. \quad (19)$$

$$(\alpha_{i+}-\alpha_{i-})(2D-U_{i+}-U_{i-})=0. \quad (20)$$

В этих уравнениях величины с индексом «-» относятся к состоянию компонента перед разрывом. Они предполагаются известными. Величины с индексом «+» относятся к состоянию компонента за разрывом и подлежат определению. Уравнения (17)–(20) дополняются уравнениями

$$\varepsilon_{i+}-E_{i+}-0,5U_{i+}^2=0. \quad (21)$$

$$F_{i+}+0,5\rho_{i+}(U_{+}-U_{i+})^2=0. \quad (22)$$

$$Q_{i+}-0,5(U_{+}-U_{i+})(P_{i+}+\rho_{i+}E_{i+})=0. \quad (23)$$

$$U_{+}=\sum_{i=1}^N\alpha_{i+}\rho_{i+}U_{i+}/\sum_{i=1}^N\alpha_{i+}\rho_{i+}. \quad (24)$$

$$P_{i+}=P_i(\rho_{i+}E_{i+}). \quad (25)$$

Уравнения (17)–(25) определяют ударную адиабату i -го компонента, поскольку образуют систему $8N+1$ уравнений для $8N+2$ величин:

$$P_{i+}, \rho_{i+}, E_{i+}, U_{i+}, \alpha_{i+}, \varepsilon_{i+}, F_{i+}, Q_{i+}, D, U_{+}.$$

Во многих ранее опубликованных работах [10–12] ударные адиабаты смесей определялись экспериментально путем измерения скорости ударной волны D в смеси и восстановления массовой скорости \bar{U} методом отражения по скоростям в экранах или ударниках. Как

правило, ударная адиабата смеси определяется в предположении, что смесь является однородным веществом. Такой подход может быть оправдан для компонентов с близкими свойствами и в узком диапазоне объемных концентраций. В случае, когда компоненты сильно различаются по своим свойствам или объемная концентрация одного из них близка к нулю или единице, справедливость такого подхода вызывает сомнения. Одна из убедительных попыток поколебать классический подход к определению ударной адиабаты смеси изложена в [13]. Показано, что в некоторых смесях, в частности, в CCl_4 с объемной концентрацией тяжелого компонента $\alpha=0,2$, давление на сильном разрыве изменяется задолго до того, как его догонит волна разгрузки от тыльной поверхности ударника. Иными словами, сразу за сильным разрывом начинаются релаксационные процессы, которые влияют на сильный разрыв.

Уравнения (17)–(25) отличаются от ранее известных уравнений на поверхности сильного разрыва наличием кластерного взаимодействия. Рассмотрим его влияние на примерах воздуха (смесь кислорода O_2 с азотом N_2) и смеси алюминия Al с азотом N_2 . Начальные значения параметров азота и кислорода приведены в табл. 1.

Из уравнений (17)–(24) и уравнения состояния идеального газа $P=(\gamma-1)\rho E$ следует зависимость массовой скорости за разрывом U_{+} от скорости разрыва D :

$$U_{+}=\frac{2}{\gamma+1}D\left[1-\left(\frac{C_0}{D}\right)^2\right]. \quad (26)$$

При $D=3$ км/с и $\gamma=1,4$ для азота получается $U_{N_2}=2,469$ км/с, $P_{N_2}=9,5\cdot 10^{-3}$ ГПа, $F_{N_2}=3,8\cdot 10^{-9}$ ГПа, для кислорода $U_{O_2}=2,473$ км/с, $P_{O_2}=0,0106$ ГПа, $F_{O_2}=-6,83\cdot 10^{-9}$ ГПа, для смеси $U=2,470$ км/с. Таким образом, при разумных значениях $D|F_i|\ll P_i$ влияние кластерного взаимодействия и на азот, и на кислород ничтожно. На рис. 1 приведены ударные ади-

Таблица 1

Величина	P МПа	ρ , кг/м ³	α	η	E, кДж/г	C_0 , км/с	U, км/с
Вещество							
N_2	0,1	1,25	0,8	0,7776	0,02	0,335	0
O_2	0,1	1,43	0,2	0,2224	0,01748	0,313	0

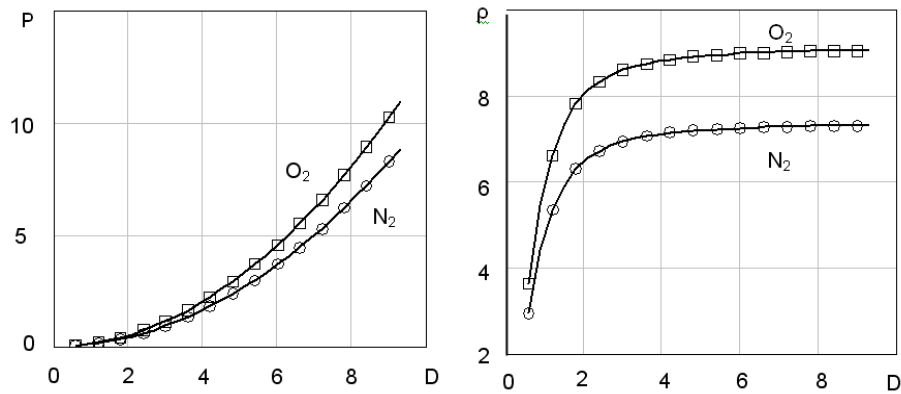


Рис. 1. Зависимость P МПа и ρ кг/м³ от D км/с для O_2 и N_2 без кластерного взаимодействия — сплошные линии, и с кластерным взаимодействием: \circ — N_2 , \square — O_2

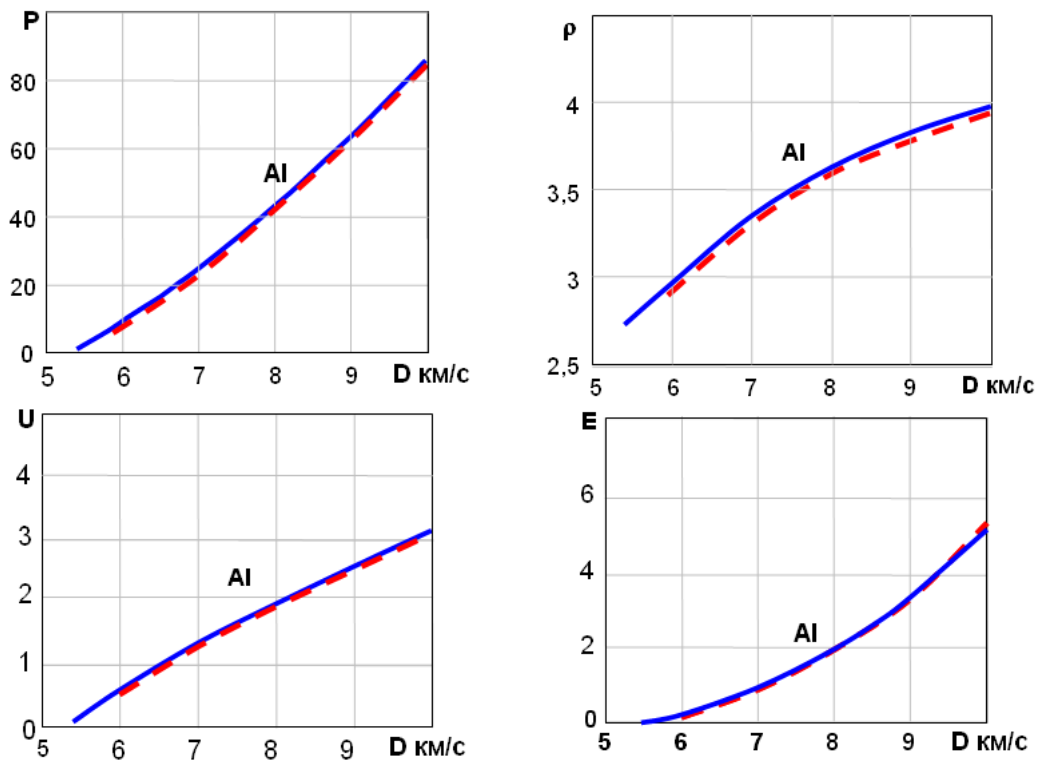


Рис. 2. Зависимость P ГПа, ρ г/см³, U км/с, E кДж/г от D км/с для Al . Сплошной линией обозначена зависимость без кластерного взаимодействия, штриховой линией обозначена зависимость с кластерным взаимодействием

абаты азота и кислорода без кластерного взаимодействия и с учетом кластерного взаимодействия, рассчитанные по уравнениям (17)–(25).

Расчеты подтверждают сделанный ранее вывод, что в смеси компонентов, свойства которых мало отличаются друг от друга, кластерное взаимодействие компонентов несущественно.

Иное положение возникает в смеси алюминия с азотом. Возьмем для Al самое простое

уравнение состояния конденсированного вещества

$$P = (n-1)\rho E + C_{0k}^2 (\rho - \rho_{0k}) \quad (27)$$

с параметрами $n = 3,5$, $\rho_{0k} = 2,71$ г/см³, $C_{0k} = 5,333$ км/с. Начальные значения параметров N_2 и Al приведены в табл. 2.

Таблица 2

Величина Вещество	P МПа	ρ , г/см ³	α	η	E, кДж/г	C_0 , км/с	U, км/с
N ₂	0,1	$1,25 \cdot 10^{-3}$	0,5	0,9995	$1,47 \cdot 10^{-5}$	0,335	0
Al	0,1	2,71	0,5	0,0005	$1,748 \cdot 10^{-2}$	5,333	0

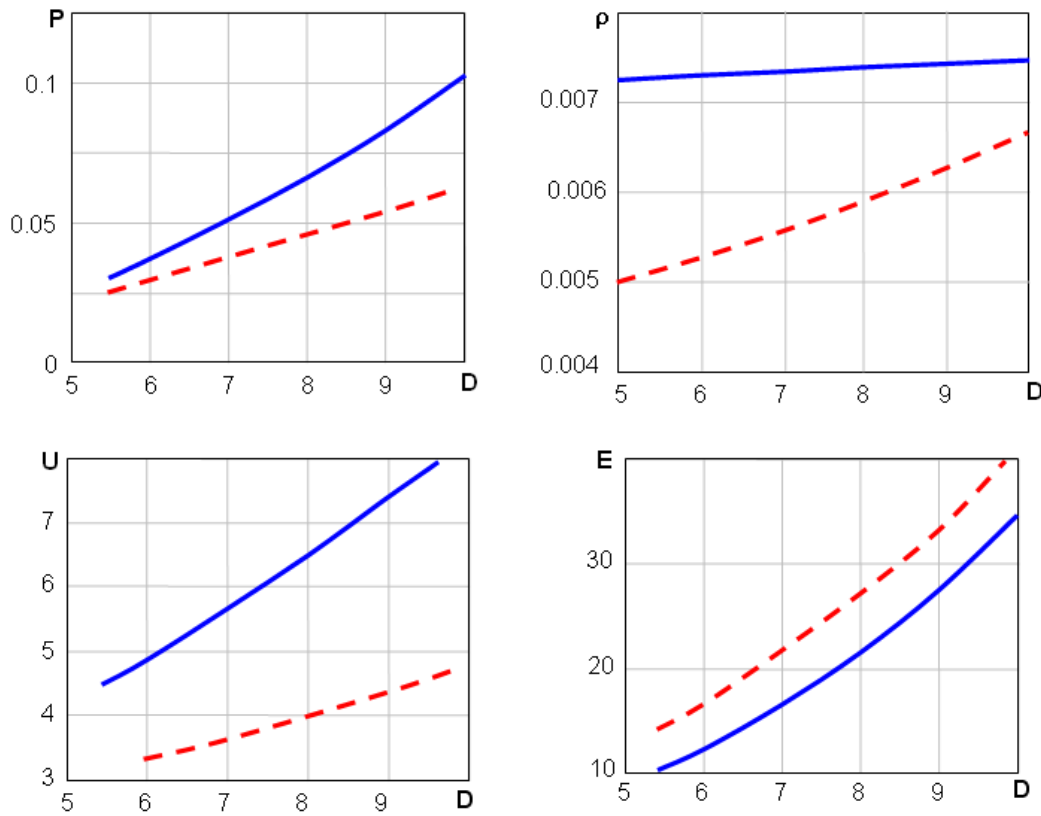


Рис. 3. Зависимость P ГПа, ρ г/м³, U км/с, E кДж/г от D км/с для азота.

Сплошной линией обозначена зависимость без кластерного взаимодействия, штриховой линией обозначена зависимость с кластерным взаимодействием

Для скорости ударной волны $D = 8$ км/с при расчетах по независимым ударным адиабатам получается $U_{N_2} = 6,655$ км/с, $P_{N_2} = 0,0664$ ГПа, $U_{Al} = 1,975$ км/с, $P_{Al} = 42,82$ ГПа. Скорость смеси, вычисленная по формуле

$$U = \eta_{N_2} U_{N_2} + \eta_{Al} U_{Al},$$

где $\eta_{N_2} = 0,0005$, $\eta_{Al} = 0,9995$ — массовые концентрации, равна $U = 1,9773$ км/с. Значения сил кластерного взаимодействия F_i , рассчитанные по уравнению (22), равны $F_{N_2} = -0,0084$ ГПа, $F_{Al} = -0,0664$ ГПа. Из сравнения этих значений со значениями P_{N_2} и P_{Al}

видно, что влияние кластерного взаимодействия на параметры алюминия должно быть малым, а на параметры N₂ — большим. Зависимости $P(D)$, $\rho(D)$, $U(D)$ и $E(D)$ для Al, рассчитанные по независимым ударным адиабатам и с учетом кластерного взаимодействия, приведены на рис. 2.

На рис. 3 изображены зависимости $P(D)$, $\rho(D)$, $U(D)$ и $E(D)$ для азота, рассчитанные по независимым ударным адиабатам без учета кластерного взаимодействия и с учетом кластерного взаимодействия.

Результаты расчетов качественно согласуются с предварительными оценками. Из них следует, что кластерное взаимодействие заметно

разогревает азот, в результате чего его удельная внутренняя энергия возрастает, а плотность снижается.

Список литературы

1. Куропатенко, В. Ф. Модели механики сплошных сред / В. Ф. Куропатенко. Челябинск : Челяб. гос. ун-т, 2007. 302 с.
2. Нигматулин, Р. И. Основы механики гетерогенных сред / Р. И. Нигматулин. М. : Наука, 1978. 332 с.
3. Рахматуллин, Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред / Х. А. Рахматуллин // Приклад. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 27. С. 184–195.
4. Крайко, А. Н. Механика многофазных сред / А. Н. Крайко [и др.] // Итоги науки и техники. Гидромеханика. 1973. Т. 6. С. 93–174.
5. Яненко, Н. Н. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц / Н. Н. Яненко [и др.]. Новосибирск : Наука, 1980. 158 с.
6. Куропатенко, В. Ф. Модель многокомпонентной среды / В. Ф. Куропатенко // Докл. Акад. наук. 2005. Т. 403. № 66. С. 761–763.
7. Куропатенко, В. Ф. Теория смесей / В. Ф. Куропатенко // Успехи механики сплош-
- ных сред : сб. науч. тр. к 70-летию В. А. Левина. Владивосток : Дальнаука, 2009. С. 426–442.
8. Струминский, В. В. Влияние диффузной скорости на течение газовых смесей / В. В. Струминский // Приклад. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 2. С. 203–210.
9. Куропатенко, В. Ф. Ударные волны в многокомпонентных средах / В. Ф. Куропатенко, В. Г. Лупанов // Соврем. баллистика и смеж. вопр. механики. Томск : НИИПММ ТГУ, 2009. С. 4.
10. Дремин, А. Н. Метод определения ударных адиабат дисперсных веществ / А. Н. Дремин, И. А. Карпунин // Приклад. механика и техн. физика. 1960. № 3. С. 184.
11. Алексеев, Ю. Ф. Ударное сжатие двухкомпонентных парафино-вольфрамовых смесей / Ю. Ф. Алексеев, Л. В. Альтшулер, В. П. Крупникова // Приклад. механика и техн. физика. 1971. № 4. С. 152.
12. Мак-куин, С. Высокоскоростные ударные явления / С. Мак-куин, Дж. Тейлор Марш. М. : Мир, 1973.
13. Долгобородов, А. Ю. Особенности распространения ударных волн в смесях / А. Ю. Долгобородов [и др.] // Физика горения и взрыва. 1992. Т. 28, № 3. С. 106–111.